ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2014-2015
Traccia delle lezioni del 9 e 11 marzo 2015

March 11, 2015

1 Il Teorema di Plancherel e la trasformata in $\mathbf{L}^2$

Vale il seguente:

Teorema di Plancherel - *Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$, Allora:*
1) L'integrale (nel senso del valore principale)

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

esiste per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, eccetto, al più, un insieme di misura nulla.
Posto allora

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt,$$

si ha inoltre:
2) $F \in L^2(\mathbb{R})$
3) Vale la formula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

4) Vale l'identità:

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

COMMENTI : la proprietà 4) è detta anche **principio di conservazione della norma (o dell'energia).**

La proprietà 1) suggerisce la seguente definizione.

DEFINIZIONE - Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$; si chiama *Trasformata di Fourier in* L^2, la funzione F definita da

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \tag{1}$$

OSSERVAZIONE : se inoltre $f \in L^1(\mathbb{R})$, ossia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, allora l'integrale in (1) coincide con l'integrale improprio, ossia la trasformata di Fourier in L^2 **coincide** con la trasformata di Fourier in L^1, vista in precedenza. La definizione precedente è pertanto un'estensione del concetto di trasformata di Fourier e, ovviamente, assume rilevanza per quelle funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R})$ e non a $L^1(\mathbb{R})$, ossia per quelle funzioni per le quali la trasformata in $L^1(\mathbb{R})$ non è definita.

Ciò posto, la proprietà 3) del teorema di Plancherel diviene la formula dell'antitrasformata, formula che, a differenza di quanto accade in L^1, vale sotto le **stesse** ipotesi che assicurano l'esistenza della trasformata.

2 Proprietà di simmetria

Dal teorema di Plancherel segue l'importante proprietà della trasformata in L^2 :

Teorema (Proprietà di simmetria) *Sia* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *e sia* $\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega)$ *la sua trasformata. Allora* $F \in L^2(\mathbb{R})$ *e*

$$\mathfrak{F}\{\mathfrak{F}\{f\}\} = 2\pi f(-\omega).$$

In particolare, se f è inoltre pari, allora la trasformata della trasformata di Fourier di f coincide con f, a meno di un fattore 2π.

Conseguenze:

♦ Poiché la trasformata dell'impulso rettangolare

$$f(t) = \begin{cases} M \text{ se } |t| \leq L \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases};$$

è la funzione

$$F(\omega) = 2ML \ \mathrm{sink}(\omega L),$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$g(t) = 2ML \ \mathrm{sink}(Lt)$$

è

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = G(\omega) = \begin{cases} 2\pi M \text{ se } |\omega| \leq L \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}.$$

Si osservi che tale trasformata non è continua in $\mathbb{R}$. Infatti $g \notin L^1(\mathbb{R})$!

♦ Poiché la trasformata dell'impulso esponenziale

$$h(t) = \exp(-|t|);$$

è la funzione

$$H(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2},$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$\varphi(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

è

$$\mathfrak{F}\{\varphi(t)\} = \Phi(\omega) = 2\pi \exp(-|\omega|).$$

Si osservi che tale trasformata non è derivabile in $\omega = 0$ (ed infatti $t\varphi(t) \notin L^1(\mathbb{R})$.

3 Altre proprietà della trasformata di Fourier

Sia $f \in L^2(\mathbb{R}) \cup L^1(\mathbb{R})$ e, nel caso $f \in L^1(\mathbb{R})$ si supponga anche che f e' sviluppabile in serie di Fourier in $[-L, L]$ per ogni $L > 0$. Sia poi F la trasformata di Fourier di f. Allora valgono le seguenti proprietà:

1. S*e f è pari, allora F è pari e viceversa.*
2. S*e f è dispari, allora F è dispari e viceversa*
3. *Se f è reale e pari, allora F è reale e pari e viceversa.*
4. *Se f è reale, allora $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$.*
5. *Se F è reale e pari, allora f è reale e pari.*

4 Il caso razionale

I seguenti risultati permettono di stabilire quando una funzione **razionale** f è trasformabile in L^2 secondo Fourier e, analogamente quando una funzione **razionale** F è una trasformata di Fourier in L^2.

Teorema 1 *Sia R una funzione razionale, ossia*

$$R(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

con N, D polinomi primi tra loro. Allora :

1) $R \in L^2(\mathbb{R})$ *se e solo se R è propria e il polinomio D non ha zeri reali, ossia se e solo se*

$$\begin{aligned} &i)\ \text{gr } D - \text{gr} N > 0 \\ &ii)\ D(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

2) $R \in L^1(\mathbb{R})$ *se e solo se*

$$i)\ \text{gr } D - \text{gr} N > 1$$

$$ii)\ D(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dal teorema precedente si ha subito il seguente:

Corollario *Sia R una funzione razionale, ossia*

$$R(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

con N, D polinomi primi tra loro. Allora :

$$R \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow R \in L^2(\mathbb{R}).$$

Il viceversa di tale Corollario puo' essere falso, come illustra, ad esempio, la funzione

$$R(x) = \frac{4x+3}{x^2+9}.$$

Infatti un facile calcolo mostra che $R \in L^2$ $(\mathbb{R})$ e $R \notin L^1$ $(\mathbb{R})$.

Per quanto riguarda poi la trasformata di Fourier, valgono i seguenti risultati:

Teorema 2 *Sia f una funzione razionale,*

$$f(t) = \frac{N(t)}{D(t)}$$

con N e D polinomi, primi tra loro e $D(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora f è sempre una trasformata di Fourier. Precisamente:

(1) se gr $D -grN \geq 2$, allora f ammette trasformata di Fourier sia in $L^2(\mathbb{R})$ che in $L^1(\mathbb{R})$.

(2) se gr $D -grN = 1$, allora f ammette trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$.

(3) se gr $D -grN \leq 0$, allora f ammette trasformata di Fourier nello spazio delle distribuzioni.

Teorema 3 *Sia F una funzione razionale,*

$$F(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$$

con N e D polinomi, primi tra loro e $D(\omega) \neq 0$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$. Allora F è sempre una trasformata di Fourier. Precisamente:

(1) se gr $D -grN > 0$, allora F e' trasformata di Fourier di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

(2) se gr $D -grN \leq 0$, allora F è trasformata di Fourier di una distribuzione.

Si osservi che nel Teorema 3-(1) la proprietà "$f \in L^2(\mathbb{R})$" discende dal Teorema di Plancherel, visto in precedenza, mentre la proprietà $f \in L^1(\mathbb{R})$ sarà una (ovvia) conseguenza del calcolo della antitrasformata. Inoltre i punti (3) del Teorema 2 e (2) del Teorema 3 al momento sono una "anticipazione" e saranno visti alla fine del corso, nell'ambito delle proprietà delle distribuzioni temperate.

ESEMPIO 1

Si considerino le funzioni

$$f_1(t) = \frac{5+t}{t-9}; \quad f_2(t) = \frac{5+t}{t^2+9};$$
$$f_3(t) = \frac{5+t}{t^2-9}; \quad f_4(t) = \frac{5+t}{(t^2+9)^2}.$$

Allora f_1 e f_3 non sono trasfomabili secondo Fourier (né in L^1 né in L^2), in quanto il denominatore ha zeri reali e quindi f_1 e f_3 non appartengono né a L^1 né a L^2. Invece $f_2 \in L^2$ e f_4 appartiene sia in L^2 che in L^1.Pertanto f_2 ammette trasformata di Fourier in L^2 e f_4 ammette trasf. di Fourier sia in L^1 che in L^2 e, ovviamente, le due trasformate coincidono

ESEMPIO 2
Si considerino le funzioni

$$F_1(\omega) = \frac{5\omega}{\omega-8}; \quad F_2(\omega) = \frac{5\omega}{\omega^2+3\omega};$$
$$F_3(t) = \frac{5\omega}{\omega^2+3}; \quad F_4(\omega) = \frac{5\omega^2+4}{\omega^2+8}.$$

Allora F_1 e F_2 non appartengono a L^2 (il denominatore ha zeri reali) e quindi non sono trasformate di Fourier. Invece $F_3 \in L^2$ e quindi (vedi Teorema 2) la sua antitrasformata appartiene a $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Infine F_4 è trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni (vedi Teorema 3).

5 Calcolo della trasf. (antitrasf.) nel caso razionale

Il calcolo della trasformata (antitrasformata) di Fourier nel caso razionale può essere effettuato utilizzando la Teoria dei Residui e il seguente:

Lemma di Jordan - *Sia g una funzione complessa analitica in un intorno di infinito e $\lim_{s\to\infty} g(s) = 0$. Allora:*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} g(s)e^{jms}ds = 0$$

se:

i) C_R *è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio* R, *contenuta nel semipiano* $\text{Im } s > 0$ *e* m *è un numero reale positivo (vedi figura 1);*

oppure se:

ii) C_R *è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio* R, *contenuta nel semipiano* $\text{Im } s < 0$ *e* m *è un numero reale negativo (vedi figura 2).*

Tale Lemma, insieme alla teoria dei Residui, consente di calcolare agevolmente integrali del tipo

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N(u)}{D(u)} e^{ju\omega} du$$

dove N e D sono polinomi con grado $D >$ grado N e $D(u) \neq 0$ per **ogni** u reale. Il procedimento è stato sviluppato dettagliatamente a lezione ed altri esercizi saranno visti nelle prossime lezioni. Qui ricordiamo soltanto i due risultati finali, il primo per la trasformata e il secondo per l'antitrasformata.

Teorema (trasformata) - *Sia* f *razionale,* $f(t) = N(t)/D(t)$. *Siano i polinomi* N, D *primi tra loro e siano verificate le condizioni*

$$\begin{gathered} D(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \text{gr } D - \text{ gr } N > 0 \end{gathered}$$

Allora, indicati con $s_1, ... s_N$ *gli zeri di* D, *si ha:*

$$\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega) = \begin{cases} 2\pi j \sum_{\text{Im } s_i > 0} \text{Res} \left[f(s) e^{-j\omega s}, s_i \right] & \text{per } \omega < 0 \\ \\ -2\pi j \sum_{\text{Im } s_i < 0} \text{Res} \left[f(s) e^{-j\omega s}, s_i \right] & \text{per } \omega > 0 \end{cases} .$$

Tale Teorema si estende immediatamente al caso dell'antitrasformata (con alcune minori modifiche). Vale infatti il seguente:

Teorema (antitrasformata) - *Sia* F *razionale,* $F(\omega) = P(\omega)/Q(\omega)$. *Siano i polinomi* P, Q *primi tra loro e siano verificate le condizioni*

$$\begin{gathered} i) \text{ gr } P < \text{gr } Q \\ ii) \ Q(\omega) \neq 0 \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}. \end{gathered}$$

Allora, indicati con $s_1, ...s_N$ gli zeri di Q, l'antitrasformata f di F è data da:

$$f(t) = \begin{cases} -j \sum_{\text{Im } s_i<0} \text{Res } [F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t < 0 \\ \\ j \sum_{\text{Im } s_i>0} \text{Res } [F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t > 0 \end{cases}.$$

dove la scrittura $Res[H, s_i]$ indica il Residuo di H in s_i.

Esercizio: calcolare l'antitrasformata di Fourier di

$$F(\omega) = \frac{2j}{\omega^2 + 4}.$$

Poiché F è pari, anche la sua antitrasformata f è pari. Utilizzando il metodo visto in precedenza si ha per $t > 0$

$$f(t) = j \text{ Res}[F(s)e^{jst}, 2j]$$

da cui, con facile calcolo,

$$f(t) = \frac{1}{2} j e^{-2t} \text{ se } t > 0$$

e quindi

$$f(t) = \frac{1}{2} j e^{2t} \text{ se } t < 0.$$

6 La traslazione

Traslazione in frequenza - *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. Allora, indicata con F la trasformata di Fourier di f si ha*

$$f(t)e^{j\gamma t} \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$$

e

$$\mathfrak{F}\left\{f(t)e^{j\gamma t}\right\} = F(\omega - \gamma), \qquad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Traslazione temporale - *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. Allora, indicata con F la trasformata di Fourier di f si ha*

$$f(t - A) \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$$

e

$$\mathfrak{F}\left\{f(t-A)\right\} = e^{-jA\omega}F(\omega), \qquad A \in \mathbb{R}.$$

Esercizio: calcolare le trasformate di Fourier di

$$g(t) = \frac{1}{t^2+1}e^{5jt}; \quad h_1(t) = \frac{1}{(t+8)^2+1};$$
$$h_2(t) = \frac{1}{(t+8)^2+1}e^{4jt}.$$

Posto

$$f(t) = \frac{1}{t^2+1},$$

la sua trasformata di Fourier è, come si è visto nel paragrafo 2,

$$F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}. \tag{3}$$

(Per esercizio, si calcoli la trasformata di f utilizzando il Teorema 1 precedente, e si verifichi il risultato (3)).

Poiché $g(t) = f(t)e^{j5t}$, applicando la traslazione in frequenza si ottiene

$$\mathfrak{F}\left\{g(t)\right\} = F(\omega-5).$$

Poiché $h_1(t) = f(t+8)$, applicando la traslazione temporale si ottiene

$$\mathfrak{F}\left\{h_1(t)\right\} = F(\omega)e^{8j\omega}.$$

Infine, avendosi $h_2(t) = h_1(t)e^{j4t}$, applcando la traslazione in frequenza alla trasformata di h_1 si ottiene

$$\mathfrak{F}\left\{h_2(t)\right\} = F(\omega-4)e^{8j(\omega-4)}.$$

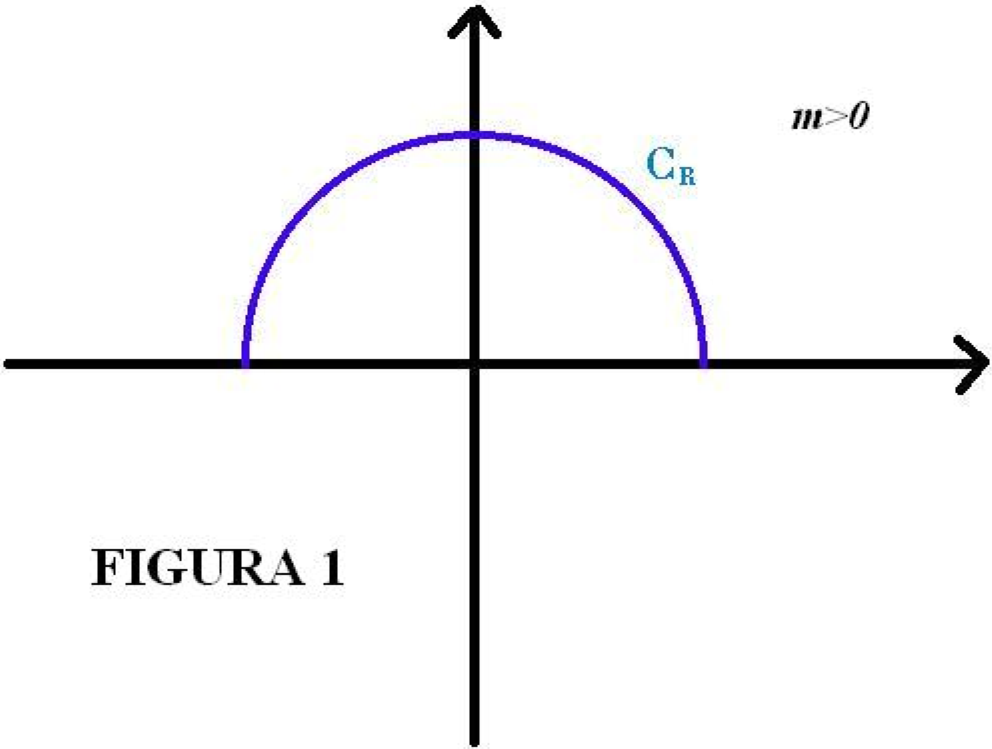

FIGURA 1

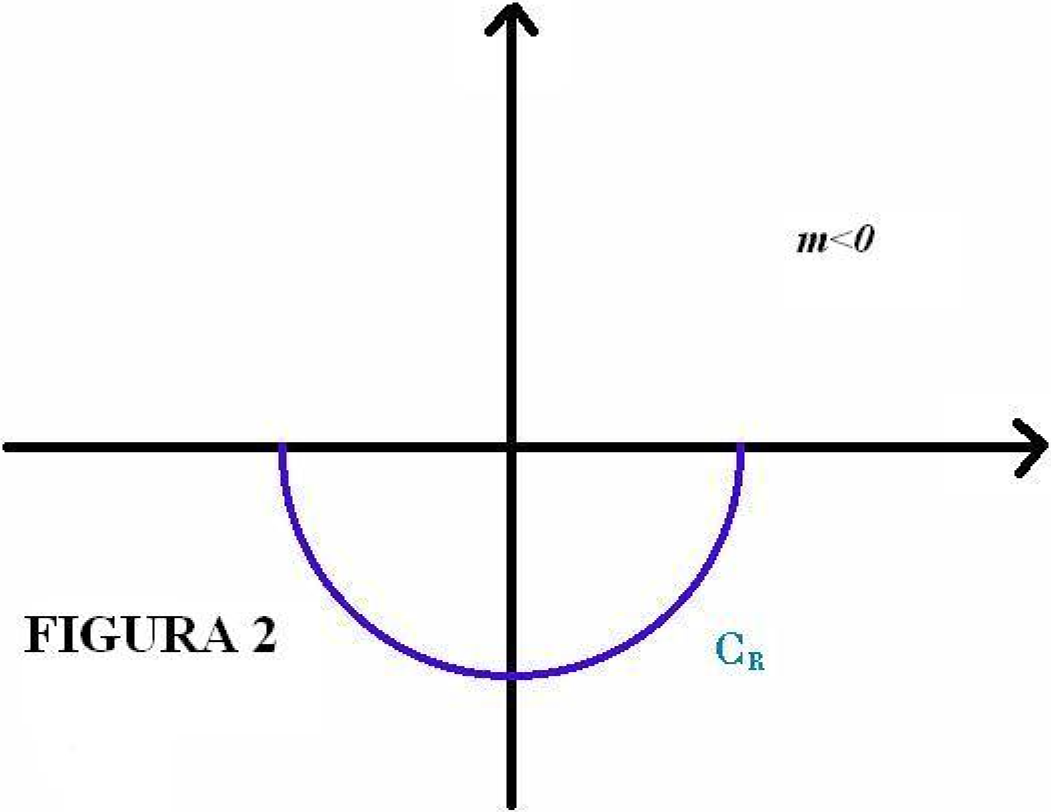

FIGURA 2