ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2014-2015
Traccia delle lezioni del 16 e 18 marzo 2015

March 18, 2015

1 Derivazione

Teorema (Derivazione) *Sia* $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R}), f\,' \in L^1(\mathbb{R})$. *Allora*

$$\mathfrak{F}\{f\,'\} = j\omega\mathfrak{F}\{f\}.$$

Tale risultato può essere provato integrando per parti l'integrale

$$\mathfrak{F}\{f\,'\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f\,'(t)e^{-j\omega t}dt$$

e usando la proprietà:

$$f \in L^1(\mathbb{R}), f\,' \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \lim_{|t|\to+\infty} f(t) = 0.$$

Iterando tale risultato, si ha facilmente il seguente:

Corollario *Sia* $f \in C^N(\mathbb{R})$ *e* $f \in L^1(\mathbb{R}), f\,' \in L^1(\mathbb{R}), ...f\,^{(N)} \in L^1(\mathbb{R})$. *Allora*

$$\mathfrak{F}\left\{f\,^{(N)}\right\} = (j\omega)^N\mathfrak{F}\{f\}.$$

In particolare, se $f \in C^2(\mathbb{R})$ *e* $f \in L^1(\mathbb{R}), f\,' \in L^1(\mathbb{R}), f\,'' \in L^1(\mathbb{R})$, *allora*

$$\mathfrak{F}\left\{f\,''\right\} = -\omega^2\mathfrak{F}\{f\}.$$

Si osservi che l'ipotesi "$f \in C^1(\mathbb{R})$" nel precedente Teorema non può essere tralasciata, come mette in luce l'esempio dell'impulso rettangolare.

2 Trasformata in L^1

Ricordiamo la formula dell'antitrasformata:

Teorema *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e sia inoltre f sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso $[-L, L]$. Ciò premesso si ha*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{1}$$

Se $F \in L^1(\mathbb{R})$, allora l'integrale in (1) converge non solo nel senso del valore principale, ma anche in senso generalizzato (o improprio). In altre parole, se $F \in L^1(\mathbb{R})$ la formula dell'antitrasformata diviene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{2}$$

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ puo' accadere che la sua trasformata $F = \mathfrak{F}\{f\}$ non appartenga a $L^1(\mathbb{R})$, come illustra, ad esempio, il caso dell'impulso rettangolare. Pertanto, come si dice, lo spazio L^1 non è chiuso rispetto all'operatore "trasformata di Fourier".

Condizioni sufficienti affinchè la trasformata appartenga a $L^1(\mathbb{R})$ si ottengono come immediata conseguenza del teorema della derivazione. Si hanno infatti i seguenti:

Corollario *Sia $f \in C^n(\mathbb{R}), f.\ f', ..., f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ allora $F = o(\omega^{-n})$ per $|\omega| \to \infty$, ossia*

$$\lim_{|\omega| \to \infty} \frac{F(\omega)}{|\omega|^{-n}} = 0$$

dove $F = \mathfrak{F}\{f\}$.

Pertanto, sotto le ipotesi di tale Corollario, la trasformata di Fourier $F(\omega)$ tende a zero (per $\omega \to \pm\infty$) più velocemente di $|\omega|^{-n}$. In altri termini, "*la trasformata di Fourier F di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ tende a zero (per $|\omega| \to +\infty$) tanto più velocemente, quanto più f è "liscia" (e con derivate in $L^1(\mathbb{R})$)*"

Corollario *Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f.\ f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$; allora $F \in L^1(\mathbb{R})$ (e quindi nella formula della antitrasformata si può omettere la sigla v.p., in quanto, in tal caso, (1) e (2) coincidono.*

3 La funzione integrale e la convoluzione per la trasf. di Fourier

Teorema (Integrazione) *Siano* $f, g \in L^1(R)$, *dove* $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$. *Posto* $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, *si ha*

$$\mathfrak{F}\{g\} = \frac{F(\omega)}{j\omega}.$$

Poiché la trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$ è una funzione continua per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, dalla proprietà precedente si ha il

Corollario *Siano* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, *dove* $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$. *Posto* $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, *si ha*

$$\lim_{\omega\to 0} F(\omega) = 0.$$

La Convoluzione

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Si chiama *prodotto di convoluzione di* f *e* g, e si indica con $f * g$, la funzione

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{3}$$

Tale definizione è lecita, nel senso che è possibile provare che

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Il prodotto di convoluzione gode delle proprietà:

$$\begin{array}{ccc} \text{commutativa} & : & f_1 * f_2 = f_2 * f_1 \\ \text{associativa} & : & (f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3) \\ \text{distributiva} & : & (f_1 + f_2) * f_3 = (f_1 * f_3) + (f_2 * f_3) \end{array}$$

Tali proprietà, caratteristiche dell'usuale prodotto, giustificano il nome di prodotto di convoluzione dato a (3). Vale il seguente:

Teorema *Siano* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. *Posto* $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}, G(\omega) = \mathfrak{F}\{g\}$, *si ha*

$$\mathfrak{F}\{f * g\} = F(\omega)G(\omega).$$

In altre parole, l'antitrasformata di Fourier della funzione $H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$ *è la convoluzione* $f * g$

4 Il teorema di Shannon

Si veda Cap. 3.14 del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

5 Trasformata di Laplace

Come si è visto, sono trasformabili secondo Fourier le funzioni appartenenti agli spazi $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$. Tali spazi tuttavia non sono sufficientementi "ampi" per poter applicare questo algoritmo alle soluzioni di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Ad esempio, come è noto, le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

sono una combinazione lineare delle funzioni

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^{5t}$$

e le due funzioni e^t, e^{5t} non appartegono né a $L^1(\mathbb{R})$, né a $L^2(\mathbb{R})$. Nasce quindi il problema di come sia possibile applicare l'algoritmo della trasformata a funzioni la cui crescita (per $t \to +\infty$) sia di tipo "esponenziale". La Trasformata di Laplace fornisce una risposta in tal senso. Alla fine del corso, vedremo un'altra possibilità di "estensione" della trasformata di Fourier, e quest'ultima estensione costituisce, come vedremo, un **effettivo** ampliamento degli spazi $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$.

5.1 Definizione

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Diremo che $f \in \Lambda^1$ se:

$$\begin{gathered} 1) \quad f(t) = 0 \quad \text{se} \quad t < 0; \\ 2) \text{ esiste } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R}) \end{gathered} \tag{4}$$

E' evidente che se $f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R})$ allora $f(t)e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $x > x_0$. Si chiama *ascissa di convergenza di* f, e si indica con α_f, il numero

$$\alpha_f = \inf \left\{ x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R}) \right\}.$$

Ad esempio, indicata con $u = u(t)$ la funzione scalino, i.e.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases},$$

per le funzioni

$$f_1(t) = e^{5t}u(t), \quad f_2(t) = tu(t), \quad f_3(t) = \sin t \; u(t),$$
$$f_4(t) = e^{-9t}u(t), \quad f_5(t) = u(t), \quad f_6(t) = u(t) - u(t-7)$$

si ha

$$\alpha_{f_1} = 5, \quad \alpha_{f_2} = \alpha_{f_3} = 0,$$
$$\alpha_{f_4} = -9, \; \alpha_{f_5} = 0, \quad \alpha_{f_6} = -\infty.$$

Pertanto l'ascissa di convergenza può anche valere $-\infty$. Si osservi poi che la funzione $f(t) = e^{t^2}u(t)$ non appartiene a Λ^1.

Ciò premesso, si ha la seguente

Definizione. *Sia $f \in \Lambda^1$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza . Si chiama trasformata di Laplace di f, e si indica con $L[f]$, la trasformata di Fourier di $f(t)e^{-xt}$, dove $x > \alpha_f$, ossia*

$$L[f(t)] = \mathfrak{F}\left\{f(t)e^{-xt}\right\}. \tag{5}$$

Utilizzando la definizione di trasformata di Fourier si ottiene facilmente

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{6}$$

dove s è un qualunque numero complesso con $\operatorname{Re} s = x(> \alpha_f)$.

La funzione F definita in (6) gode di alcune importanti proprietà.

Lemma. *Sia $f \in \Lambda^1$ e sia $F = L[f]$. Allora:*

(i) F è una funzione analitica in Re $s > \alpha_f$. Inoltre F ha almeno una singolarità non eliminabile sulla retta $\operatorname{Re} s = \alpha_f$.

(ii) $\lim_{\operatorname{Re} s \to \infty} F(s) = 0$.

Per complementi sulla trasformata di Laplace, e per la sua definizione, si veda anche Cap. 1.1, 1.2, 1.3 del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

5.2 Formula di Bromwich-Mellin

Vale la seguente:

Formula di Bromwich-Mellin - *Sia* $f \in \Lambda^1$. *Sia inoltre* f *sviluppabile in serie di Fourier in* $[0, L], \forall L > 0$. *Indicata con* $F(s) = L[f(t)]$ *la sua trasformata di Laplace, si ha*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{L \to +\infty} \int_{x-jL}^{x+jL} F(s) e^{st} ds \tag{7}$$

dove $x = \operatorname{Re} s > \alpha_f$

La formula (7), nota anche sotto il nome di formula di Riemann-Fourier, può essere facilmente ottenuta dalla formula di inversione per la trasformata di Fourier e da (5). L'ipotesi "f *sviluppabile in serie di Fourier in* $[0, L], \forall L > 0$" (o equivalentemente "f *sviluppabile in serie di Fourier in* $[-L, L], \forall L > 0$") serve per poter applicare la formula di inversione della trasformata di Fourier. Si osservi che, per il Teorema di Plancherel, tale ipotesi può essere omessa quando $f(t)e^{-xt} \in L^2[0, \infty)$.

Utilizzando il Lemma di Jordan, in una forma leggermente più generale di quella ricordata nelle scorse lezioni, è possibile mostrare che il secondo membro in (7) è indipendente dalla scelta di x, purché sia $x > \alpha_f$. Si osservi poi che l'integrale in (7) può essere inteso come il valore principale di un integrale calcolato, nel piano complesso, lungo la retta Re $s = x$. Pertanto (7) può essere scritta anche nella forma:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} v.p. \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s) e^{st} ds.$$

Nel caso in cui F sia razionale, vale il seguente risultato, la cui seconda parte sarà provata in seguito:

Teorema 3 *Sia* F *razionale,* $F(s) = N(s)/D(s)$.

- *Se gr* $D >$ *gr* N *allora esiste* $f \in \Lambda^1$ *tale che* $F(s) = L[f(t)]$.
- *Se gr* $D \leq$ *gr* N. *allora* F *è la trasformata di Laplace di una distribuzione.*

Utilizzando poi la teoria dei residui e il Lemma di Jordan, si puo' provare il seguente:

Teorema 4 *Sia F razionale propria, $F(s) = N(s)/D(s)$ con N, D polinomi primi tra loro con gr $N <$ gr D. Allora l'antitrasformata di Laplace di $F(s)$ è data, per $t > 0$, dalla funzione*

$$f(t) = \sum_{s_i} \mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_i],$$

dove s_i rappresentano TUTTI gli zeri del polinomio D, i.e. le singolarità di F.

Per maggiori chiarimenti e dettagli si veda anche Cap. 1.13.1, 1.13.2, del testo M. Marini "*Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche*", Edizioni Cedam, 1999.