ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2014-2015
Traccia delle lezioni del 2 e 4 marzo 2015

March 4, 2015

1 Spazi normati

Sia V uno spazio vettoriale complesso. Si chiama *norma in V* ogni applicazione $||\cdot||$

$$||\cdot|| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

$$\begin{array}{ll} ||f|| \geq 0, = 0 \text{ se e solo se } f = \underline{0} & \forall f \in V, \\ ||\alpha f|| = |\alpha| \; ||f|| & \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f \in V \\ ||f+g|| \leq ||f|| + ||g|| & \forall f, g \in V \end{array}$$

e lo spazio V si chiama *spazio normato.*

Ad esempio, se V è lo spazio delle funzioni continue in $[0,T]$, ossia $V = C[0,T]$, allora è immediato verificare che sono norme in $C[0,T]$ le seguenti ($f \in C[0,T]$):

$$||f||_M = \max_{t \in [0,T]} |f(t)|$$

$$||f||_1 = \int_0^T |f(t)| dt$$

$$||f||_2 = \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

- **Ogni spazio normato V è anche uno spazio metrico, con distanza d data da**

$$d(f,g) = ||f-g|| \qquad\qquad (f,g \in V)$$

In riferimento all'esempio di sopra, allora in $C[0,T]$ è possibile considerare le tre distanze (metriche) ($f,g \in C[0,T]$):

$$d_M(f,g) = ||f-g||_M = \max_{t\in[0,T]} |f(t)-g(t)|$$
$$d_1(f,g) = ||f-g||_1 = \int_0^T |f(t)-g(t)|dt$$
$$d_2(f,g) = ||f-g||_2 = \left(\int_0^T |f(t)-g(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Esercizio. Sia $f(t) = t(1-t), g(t) = t/2$ e sia $T = 1$. Si verifichi che in $C[0,1]$, per le distanze sopra definite si ha

$$d_M(f,g) = 1/2, \qquad d_1(f,g) = 1/8.$$

2 Richiami sul concetto di integrale improprio

Sia f una funzione reale di variabile reale, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile in ogni intervallo limitato e chiuso dell'asse reale. Se, **comunque** siano scelti $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, esiste finito il limite

$$\lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

e tale limite è indipendente da a,b, allora si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =_{def} \lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

e diremo che f è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, o, equivalentemente che l'integrale di f, esteso a $\mathbb{R}$, converge. In caso contrario diremo che f non è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ o semplicemente che f non è integrabile in $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, che l'integrale di f, esteso a $\mathbb{R}$ non converge.

Si chiama poi *valore principale dell'integrale improprio* (in $\mathbb{R}$) e si indica con

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

il limite

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =_{def} \lim_{L\to+\infty} \int_{-L}^{+L} f(x)dx. \tag{2}$$

La relazione tra le due definizioni (1), (2) è, ovviamente, la seguente: se f è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ allora il valore principale dell'integrale improprio esiste finito e coincide con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, ossia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \implies v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M.$$

Ovviamente NON vale il viceversa, ossia il valore principale dell'integrale improprio può essere finito, ma l'integrale (1) può non convergere, i.e.

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \;\not\Rightarrow\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M\ .$$

Ad esempio per la funzione

$$f(x) = \frac{x^5}{x^4+1}$$

si ha

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^5}{x^4+1}dx = 0$$

in quanto la funzione è dispari, ma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ovviamente non converge (f è illimitata!).

3 Gli spazi $\mathbf{L}^p$

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile reale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e sia p un numero reale $p \geq 1$. Scriveremo $f \in L^p(\mathbb{R})$ se $\mid f \mid^p$ è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ ossia se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt < \infty.$$

In particolare se $p = 1, f$ si dice *sommabile* e in tal caso scriveremo $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se $p = 2$, f si dice *a quadrato sommabile* e scriveremo $f \in L^2(\mathbb{R})$. Gli spazi $L^p(\mathbb{R})$ sono spazi normati (e quindi anche metrici). In particolare la norma e la distanza in $L^1(\mathbb{R})$ sono date, rispettivamente, da $(f, g \in L^1(\mathbb{R}))$

$$||f||_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt, \quad d_{L^1}(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|dt.$$

Per quanto riguarda $L^2(\mathbb{R})$, la norma e la distanza sono date da $(f, g \in L^2(\mathbb{R}))$

$$||f||_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}, \quad d_{L^2}(f,g) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Esistono funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R})$, ma non a $L^1(\mathbb{R})$ e viceversa. Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t^{-1} & \text{se } t \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $f \notin L^1(\mathbb{R})$. Invece per la funzione

$$g(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $g \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \notin L^2(\mathbb{R})$. Chiaramente poi esistono funzioni appartenenti sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$: ad esempio la funzione

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$ ossia $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Vale il seguente:

Teorema *Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile reale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ .Allora l'integrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

converge se e solo se $f \in L^1(\mathbb{R})$, ossia se e solo se f è assolutamente integrabile sull'intero asse reale.

4 Trasformata di Fourier in $\mathbf{L}^1$

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile **reale** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sommabile, ossia $f \in L^1(\mathbb{R})$, i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty;$$

ciò posto, si chiama *Trasformata di Fourier (in L^1)* di f la funzione F definita da

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \tag{3}$$

dove ω è un numero reale fissato.

- La definizione (3) è lecita, nel senso che l'integrale in (3) converge per ogni ω reale.
- Utilizzando le formule di Eulero si ha:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t \ dt}_{(*)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t \ dt}_{(+)}$$

  $(*)$ si chiama *Trasformata coseno di Fourier* e $(+)$ *Trasformata seno di Fourier.*

5 Antitrasformata

Vale il seguente teorema.

Teorema *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si supponga inoltre che f sia sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo chiuso $[-L, L]$, qualunque sia L. Ciò premesso si ha*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{4}$$

La formula (4) è detta formula dell'antitrasformata di Fourier.

Si osservi che (3) è una definizione e vale sotto la sola condizione $f \in L^1(\mathbb{R})$. La formula dell'antitrasformata (4) è invece conseguenza di un Teorema e richiede una condizione aggiuntiva, ossia che f sia sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo chiuso $[-L, L]$, qualunque sia L.

6 Prime proprietà della trasformata di Fourier

Indichiamo con $\mathfrak{F}$ l'operatore che associa a $f(\in L^1(\mathbb{R}))$ la sua trasformata di Fourier F, ossia $\mathfrak{F}\{f\} = F$. Ciò premesso si ha:

Teorema. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; allora la sua trasformata F è una funzione continua e infinitesima per $|\omega| \to \infty$.*

Corollario. *La trasformata di Fourier F di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ è una funzione limitata per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.*

Ad esempio non sono trasf. di Fourier (di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$!) le funzioni

$$F_1(\omega) = \frac{\omega^2 + 12}{\omega^2 + 4}; F_2(\omega) = \frac{\omega + 12}{\omega^2 - 4}.$$

La trasformata di Fourier F di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$ può essere nonderivabile. Esempi in tal senso saranno visti nelle prossime lezioni. Se, all'ipotesi $f \in L^1(\mathbb{R})$ aggiungiamo anche $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$ allora la risposta è affermativa, come segue dal seguente risultato.

Teorema *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$; allora la trasformata di Fourier F di f è di classe C^1 e si ha:*

$$\mathfrak{F}\{tf(t)\} = j\frac{d}{d\omega}F(\omega).$$

Si osservi che le due ipotesi "$f \in L^1(\mathbb{R})$" *e* "$tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$" sono tra loro indipendenti. Infatti, ad esempio, per la funzione f, data da

$$f(t) = \begin{cases} 1/t^2 & \text{se } t > 1 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha $f \in L^1(\mathbb{R})$" *e* "$tf(t) \notin L^1(\mathbb{R})$, mentre per la funzione g, data da

$$g(t) = \begin{cases} 1/t & \text{se } t \in (0,1) \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha "$g \notin L^1(\mathbb{R})$" *e* "$tg(t) \in L^1(\mathbb{R})$" .

Si osservi inoltre che tale teorema fornisce solo una condizione sufficiente.

Dal teorema precedente seguono poi i seguenti:

Corollario 1 *Sia $t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ per $n = 0, 1, ..., N$. Allora la trasformata di Fourier F di f è una funzione di classe $C^N(\mathbb{R})$.*

Corollario 2 *Sia f a supporto compatto, i.e. esiste un intervallo compatto $[a, b]$ tale che $f(t) = 0$ se $t \notin [a, b]$. Sia f assolutamente integrabile in $[a, b]$. Allora f è trasformabile secondo Fourier e la sua trasformata F è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.*

Si osservi che tali corollari forniscono solo condizioni sufficienti. Ad esempio la trasformata F puo' essere di classe C^∞ $(\mathbb{R})$ anche se f non è a supporto compatto. Una condizione sufficiente discende subito dal Corollario 1. Infatti se $t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ vale per **ogni** $n \in \mathbb{N}$, allora $F \in C^\infty(\mathbb{R})$. Un esempio in tal senso è dato dall'impulso esponenziale, che sarà trattato nella prossima sezione.

7 Esempi

▲ **Impulso Rettangolare** - Sia

$$f_R(t) = \begin{cases} M \text{ se } |t| \leq L \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases};$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F_R(\omega) = 2ML\text{sink}(\omega L) = \begin{cases} 2M\omega^{-1}\sin(\omega L) & \text{se } \omega \neq 0 \\ \\ 2ML & \text{se } \omega = 0 \end{cases}.$$

Si osservi che F_R è continua, infinitesima per $|\omega| \to \infty$, $F_R \in C^\infty(\mathbb{R})$, ma $F_R \notin L^1(\mathbb{R})$. Quindi, in generale, in $L^1(\mathbb{R})$ la trasformata di Fourier non può essere iterata.

▲ **Impulso Triangolare** - Sia

$$f_T(t) = \begin{cases} M(t+1) & \text{se } -1 \leq t < 0 \\ M(1-t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F_T(\omega) = \frac{2M(1-\cos\omega)}{\omega^2} \text{per } \omega \neq 0, F_T(0) = M.$$

ossia, usando le formule di duplicazione del coseno,

$$F_T(\omega) = M\left(\text{sink}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2.$$

Si osservi che F_T è continua, infinitesima per $|\omega| \to \infty$, $F_T \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $F_T \in L^1(\mathbb{R})$.

▲ **Impulso gaussiano** - Sia

$$f_G(t) = \exp(-t^2/2);$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F_G(\omega) = \sqrt{2\pi}\exp((-\omega^2/2).$$

Anche in questo caso F_G è continua, infinitesima per $|\omega| \to \infty$, $F_G \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $F_G \in L^1(\mathbb{R})$.

▲ **Impulso esponenziale** - Sia

$$f_E(t) = \exp(-|t|);$$

ovviamente $f_E \in L^1(\mathbb{R})$ e si ha con facili calcoli, utilizzando le proprietà dell'esponenziale in $\mathbb{C}$ (vedi paragrafo seguente)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}e^{-j\omega t}dt = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Pertanto la trasformata di Fourier di f_E è la funzione

$$F_E(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Si osservi che F_E è continua, infinitesima per $|\omega| \to \infty$, $F_E \in L^1(\mathbb{R})$ e $F_E \in C^\infty(\mathbb{R})$.