ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2014-2015
Traccia delle lezioni del 30/3 e 1/4

April 1, 2015

1 Proprietà della trasformata di Laplace

Ricordiamo le principali proprietà della trasformata di Laplace, che intervengono nella risolubilità di equazioni differenziali e integro-differenziali a coefficienti costanti. Per maggiori chiarimenti e dettagli si veda anche Cap. 1.9., e 1.10, del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche*", Edizioni Cedam, 1999.

- **Linearità**

  Siano $f_1, f_2 \in \Lambda^1$ e siano c_1, c_2 due costanti (reali o complesse). Allora:

  $$L[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 L[f_1] + c_2 L[f_2].$$

- **Derivazione**

  Sia $f \in C^1[0, \infty)$ e sia $f, f' \in \Lambda^1$. Allora $f(0+) = \lim_{t \to 0+} f(t)$ esiste finito e

  $$L[f\,'] = sL[f] - f(0+). \tag{1}$$

- Sia $f \in C^2[0, \infty)$ e sia $f, f', f\,'' \in \Lambda^1$. Allora $f(0+) = \lim_{t \to 0+} f(t)$ e $f\,'(0+) = \lim_{t \to 0+} f\,'(t)$ esistono finiti e

  $$L[f\,''] = s^2 L[f] - s\ f(0+) - f\,'(0+).$$

- Sia $f \in C^N[0,\infty)$ e sia $f, f', .., f^{(N)} \in \Lambda^1$. Allora $f^{(i)}(0+) = \lim_{t\to 0+} f^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, ...N$ esistono finiti e

$$L[f^{\ (N)}] = s^N L[f] - \left(s^{N-1}\ f(0+) + s^{N-2} f^{\ \prime}(0+) + ...f^{\ (N-1)}(0+)\right).$$

- **Integrazione**

  Sia $f \in \Lambda^1$ e sia $g(t) = \int_0^t f(r)dr \in \Lambda^1$. Allora:

$$L\left[g(t)\right] = \frac{L[f]}{s}.$$

- **Convoluzione**

  Sia $f, g \in \Lambda^1$. Poiché f e g sono nulle per $t < 0$, il prodotto di convoluzione $f * g$ assume la forma

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$$

  e si ha

$$L[f * g] = L[f]\ L[g].$$

  In altre parole, sia $f, g \in \Lambda^1$; posto $L[f] = F(s)$, $L[g] = G(s)$ si ha

$$f * g = L^{-1}(F(s)\ G(s)),$$

  dove il simbolo L^{-1} indica l'antitrasformata di Laplace.

In generale, l'ipotesi di esistenza e continuità della derivata di f in $[0,\infty)$ nella proprietà della derivazione non può essere tralasciata, come illustra, ad esempio la funzione

$$g(t) = u(t) - u(t-1).$$

Infatti, con facili calcoli si ottiene

$$L[g'] = 0, \quad L[g] = \frac{1-e^{-s}}{s},$$

e quindi (1) non è verificata.

2 Equazioni differenziali lineari e trasformata di Laplace

Si consideri la seguente equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$y'' + ay' + by = g(t) \tag{2}$$

dove $g \in \Lambda^1$. Vogliamo trovare la soluzione y di (2) che verifica le condizioni iniziali

$$y(0) = A, y'(0) = B.$$

Essendo $g \in \Lambda^1$, è possibile provare che tutte le soluzioni di (2) sono (per $t \geq 0$) funzioni di classe Λ^1. Quindi, per la risoluzione di (2) possiamo utilizzare il metodo della trasformata di Laplace. Usando la linearità si ottiene

$$L[y''] + aL[y'] + bL[y] = L[g],$$

da cui, per il Teorema di derivazione, si ha

$$s^2 L[y] - As - B + a(sL[y] - A) + bL[y] = L[g]$$

ossia

$$L[y] = \underbrace{\frac{As + B + aA}{s^2 + as + b}}_{(\#)} + \underbrace{\frac{1}{s^2 + as + b}}_{(*)} L[g]$$

Le funzioni (#) e (*) sono funzioni razionali proprie ed allora è possibile calcolare la loro antitrasformata utilizzando il Teorema visto in precedenza. Indicate con f e h tali antitrasformate, ossia

$$f(t) = L^{-1}\left(\frac{As + B + aA}{s^2 + as + b}\right)$$
$$h(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + as + b}\right),$$

applicando la proprietà di convoluzione si ottiene per $t \geq 0$

$$y(t) = f(t) + (h * g)(t).$$

Per maggiori chiarimenti e dettagli si veda anche Cap. 1.14, 1.15 e 1.16 del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

3 Equazioni differenziali lineari del 2 ordine: proprietà generali

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x) \tag{3}$$

dove le funzioni a, b, g sono continue a tratti in un intervallo I dell'asse reale del tipo $(\overline{x}, x_1)$ oppure $[\overline{x}, x_1)$. Non è escluso il caso in cui I coincida con $\mathbb{R}$.

Se g è la funzione identicamente nulla, allora (3) diviene

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{4}$$

e prende nome di equazione omogenea. Se g non è la funzione identicamente nulla, allora (3) si dice nonomogenea o affine.

Valgono le seguenti proprietà:

1. *Per ogni $x_0 \in I$ e per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione $y = y(x)$ di (3) tale che $y(x_0) = c_1$, $y'(x_0) = c_2$.*

2. *Ogni soluzione di (3) è* ***persistente****, ossia è definita in* ***tutto*** *l'intervallo I.*

3. *Nel caso omogeneo, l'insieme delle soluzioni di (4) è uno spazio lineare di dimensione 2 . Nel caso nonomogeneo, ogni soluzione y di (3) si ottiene sommando una generica soluzione y_0 dell'equazione omogenea associata (4) con una soluzione particolare $\overline{y}$ dell'equazione (3). In altri termini si ha*
$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t).$$

Si osservi che la funzione identicamente nulla è soluzione se e solo se $g \equiv 0$, ossia nel caso omogeneo.

Nelle proprietà precedenti gioca un ruolo essenziale la "linearità dell'equazione considerata. A lezione sono stati visti esempi di equazioni nonlineari (sempre del secondo ordine) in cui la validità delle proprietà 1. e 2. viene meno.

Se le funzioni a e b sono costanti, allora (3) si chiama "a coefficienti costanti". La sua risolubilità è stata trattata nei corsi di Analisi e può essere affrontata, come si è visto in precedenza, anche utilizzando la trasformata di Laplace. Esistono tuttavia nelle applicazioni vari casi in cui il modello matematico è rappresentato da un'equazione tipo (3) o (4) con a e/o b non a coefficienti costanti. Un primo esempio è l'**equazione di Schrödinger monodimensionale**

$$w'' + \frac{2m}{H^2}(E - V(x))w = 0 \tag{5}$$

dove :

m rappresenta la massa dell'elettrone;

H è la costante di Planck normalizzata (i.e. $H = h/(2\pi)$, h = costante di Planck);

E è l'energia dell'elettrone;

V è il potenziale applicato;

w è una funzione legata alla funzione d'onda ($|w(x)|^2$ rappresenta la probabilita' che l'elettrone occupi effettivamente la posizione x).

L'equazione (5) è di tipo (4) con

$$a(x) = 0, \qquad b(x) = \frac{2m}{H^2}(E - V(x)).$$

Un altro esempio è l'**equazione di Bessel,** ossia l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \qquad x \in (0, +\infty) \tag{6}$$

dove n è un parametro reale. Tale equazione interviene nello studio di problemi di diffusione in corpi con geometria cilindrica. Ad esempio interviene nella propagazione del calore in tubi, nella diffusione di vibrazioni in strutture cilindriche, nella vibrazione di segnali (modulazione).

4 L'oscillazione

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{7}$$

dove le funzioni a, b sono continue a tratti in un intervallo I dell'asse reale del tipo $(x_0, +\infty)$ oppure $[x_0, \infty)$. Non è escluso il caso in cui I coincida con $\mathbb{R}$, ossia che $x_0 = -\infty$. Ricordiamo la seguente definizione:

Definizione - Sia y una soluzione di (7), diversa dalla soluzione nulla; y si dice *oscillante* se esiste una successione $\{x_n\}$, con $x_n \to +\infty$, tale che $y(x_n) = 0$, ossia se y ha infiniti zeri che si "accumulano all'infinito". In caso contrario y si dice *nonoscillante.*

Poiché per (7) vale la proprietà dell'unicità della soluzione rispetto ai dati iniziali, il grafico di una soluzione oscillante di (7) "taglia" l'asse x infinite volte (per $x \to +\infty$). Ricordiamo poi il seguente:

Teorema (di Sturm) - *Tutte le soluzioni non banali di (7) hanno lo stesso carattere rispetto all'oscillazione, ossia o tutte oscillano o tutte nonoscillano.*

In virtù di tale risultato allora non possono coesistere per una stessa equazione (7) soluzioni oscillanti e nonoscillanti; pertanto (7) si dice *oscillante* o *nonoscillante* a seconda che tutte le sue soluzioni (diverse dalla soluzione nulla) siano oscillanti o nonoscillanti.

Un criterio di oscillazione è il seguente:

Teorema di Leigthon

I) Sia $b(x) \geq 0$ per ogni x grande, i.e. $x \geq \overline{x} \geq x_0$, e sia A una primitiva di a,ossia

$$A'(x) = a(x).$$

(i) L'equazione (7) è oscillante se

$$\int_{\overline{x}}^{\infty} e^{-A(x)}dx = \int_{\overline{x}}^{\infty} e^{A(x)}b(x)dx = +\infty.$$

(ii) L'equazione (7) è nonoscillante se

$$\int_{\overline{x}}^{\infty} e^{-A(x)}dx < +\infty, \qquad \int_{\overline{x}}^{\infty} e^{A(x)}b(x)dx < +\infty$$

II) Sia $b(x) \leq 0$ per ogni $x \geq \overline{x} \geq x_0$. Allora l'equazione (7) è nonoscillante.

- ESEMPI

Applicando il Teorema di Leigthon si ottiene facilmente che l'equazione

$$y'' + \frac{1}{x} y = 0. \tag{8}$$

è oscillante. Così pure è oscillante l'equazione

$$y'' + \frac{2x^2+1}{4x^2+4} y = 0.$$

Invece è nonoscillante l'equazione

$$y'' + \frac{1-2x^2}{4x^2+4} y = 0.$$

- Si consideri l'**equazione di Bessel,** (6) sopra introdotta. Tale equazione interviene nello studio di problemi di diffusione in corpi con geometria cilindrica. Ad esempio interviene nella propagazione del calore in tubi, nella diffusione di vibrazioni in strutture cilindriche, nella vibrazione di segnali (modulazione). Utilizzando il criterio di Leigthon è facile mostrare che tale equazione è oscillante, ossia che tutte le sue soluzioni hanno infiniti zeri reali positivi (che si accumulano a $+\infty$).

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x \in (0, +\infty)$$

- Un altro esempio è dato dall'**equazione di Schrödinger monodimensionale** (5) definita in precedenza.

L'equazione (5) è di tipo (7) con

$$a(x) = 0, \qquad b(x) = \frac{2m}{H^2}(E - V(x)).$$

A lezione sono stati discussi i due casi:

1) **Gradino di potenziale**, ossia il caso in cui

$$V(x) = \begin{cases} V_0 \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}, V_0 > 0,$$

e

$$V_0 > E > 0.$$

In tal caso l'equazione è nonoscillante.

2) **Barriera di potenziale**, ossia il caso in cui

$$V(x) = \begin{cases} V_0 \text{ se } x \in [0, X] \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}, V_0 > 0$$

e

$$V_0 > E > 0.$$

In questo caso, l'equazione di Scroedinger è oscillante.