ANALISI MATEMATICA III
ELM+TEM
A.A. 2014-2015

Traccia delle lezioni del 27 e 29 aprile 2015

April 29, 2015

1 Funzioni di Bessel

Ricordiamo che, indicata con Γ la funzione Gamma Euleriana, per ogni $n \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \tag{1}$$

sono soluzioni dell'equazione di Bessel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x \in (0, +\infty). \tag{B}$$

Le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie.* Ricordiamo poi che si chiamano *funzioni di Bessel di seconda specie* (o *funzioni di Neumann*) le funzioni

$$Y_n(x) = \frac{\cos\ \pi n}{\sin\ \pi n} J_n(x) - \frac{1}{\sin\ \pi n} J_{-n}(x) \qquad (n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}),$$
$$Y_n(x) = \lim_{p \to n} Y_p(x) = \lim_{p \to n} \left(\frac{\cos\ \pi p}{\sin\ \pi p} J_p(x) - \frac{1}{\sin\ \pi p} J_{-p}(x) \right) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Anche le funzioni Y_n sono soluzioni di (B) e sono linearmente indipendenti da J_n, sia nel caso n intero che nel caso $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Pertanto per ogni n reale

tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$d_1 J_n(x) + d_2 Y_n(x),$$

dove d_1 e d_2 sono due arbitrarie costanti reali.

Infine si chiamano *funzioni di Hankel (* oppure *funzioni di Bessel di terza specie)*, le funzioni $H_n^{\pm}$ date da

$$H_n^{\pm}(x) = J_n(x) \pm jY_n(x), \tag{H}$$

dove j rappresenta l'unità immaginaria. Pertanto $\operatorname{Re} H_n^{\pm} = J_n$ e $\operatorname{Im} H_n^{\pm} = \pm Y_n$. Anche le funzioni di Hankel sono soluzioni dell'equazione di Bessel, e quindi sono funzioni oscillanti e definite in $(0, \infty)$. Inoltre le due funzioni H_n^+ e H_n^- sono linearmente indipendenti. Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione di Bessel (B) possono essere espresse anche nella forma

$$\widetilde{d}_1 H_n^+(x) + \widetilde{d}_2 H_n^-(x).$$

Infine, da (H) sommando e sottraendo membro a membro si ottiene

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{H_n^+(x) + H_n^-(x)}{2} \\ Y_n(x) &= \frac{H_n^+(x) - H_n^-(x)}{2j}. \end{aligned}$$

2 Funzioni di Bessel - Relazioni di ricorrenza

Per le funzioni di Bessel valgono le seguenti formule:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) &= x^n J_{n-1}(x) \\ \frac{d}{dx}\left(x^{-n} J_n(x)\right) &= -x^{-n} J_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Da tali formule si ottengono poi le cosidette *formule di ricorrenza:*

$$\begin{aligned} xJ_n{}'(x) &= xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x) \\ xJ_n{}'(x) &= nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) \\ 2J_n{}'(x) &= J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \\ 2nJ_n(x) &= xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Le precedenti formule continuano a valere anche per le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n.

Esercizio 1. Provare che

$$\text{i)} \quad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$
$$\text{ii)} \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Proviamo (i). Dalla definizione di $J_{1/2}$ si ottiene

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(3/2)} (x/2)^{1/2} - \frac{1}{1!\Gamma(5/2)} (x/2)^{5/2} + \frac{1}{2!\Gamma(7/2)} (x/2)^{9/2} + \ldots\ldots \tag{3}$$

Usando le relazioni $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ e $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, viste nelle scorse lezioni, si ottiene

$$\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = (1/2)\sqrt{\pi}$$
$$\Gamma(5/2) = \frac{3}{2}\Gamma(3/2) = (1/2)(3/2)\sqrt{\pi}$$
$$\Gamma(7/2) = \frac{5}{2}\Gamma(5/2) = (1/2)(3/2)(5/2)\sqrt{\pi}$$
$$\ldots\ldots.$$

e quindi, sostituendo in (3)

$$J_{1/2}(x) = \frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} - \frac{(x/2)^{5/2}}{1!(1/2)(3/2)\sqrt{\pi}} + \frac{(x/2)^{9/2}}{2!(1/2)(3/2)(5/2)\sqrt{\pi}} + \ldots..$$

da cui

$$J_{1/2}(x) = \frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + \ldots..\right) =$$
$$= \frac{1}{x} \frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots..\right) =$$
$$= \frac{1}{x} \frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} \sin x$$

e l'asserto segue osservando che

$$\frac{1}{x}\frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}.$$

Esercizio 2. Utilizzando l'Esercizio 1 e le formule di ricorrenza (2) provare che

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x}\right)$$
$$J_{-3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{x\sin x + \cos x}{x}\right)$$

3 Formule asintotiche

Sia $n \geq 0$. Allora valgono le seguenti formule asintotiche.

Per $x \to +\infty$:

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Per $x \to 0^+$:

$$J_n(x) \sim \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

e

$$Y_n(x) \sim \begin{cases} 2\pi^{-1}\log(x/2) & (n=0) \\ -2^n\pi^{-1}x^{-n}\Gamma(n) & (n>0) \end{cases}.$$