ANALISI MATEMATICA III
ELM+TEM
A.A. 2014-2015
Traccia delle lezioni del 4 e 6 maggio 2015

May 6, 2015

1 Le distribuzioni - Definizione

Indichiamo con L^1_{loc} lo spazio vettoriale

$$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ assolutamente integrabile in ogni intervallo limitato e chiuso di } \mathbb{R}\}\,;$$

vogliamo costruire un'estensione di tale spazio. [Il caso in cui f assuma valori in $\mathbb{C}$, ossia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, può essere trattato in modo simile]

Ricordiamo che una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *a supporto compatto* se esiste un intervallo compatto (i.e. limitato e chiuso) $[a, b]$ dell'asse reale tale che $\varphi(t) = 0$ se $t \notin [a, b]$. L'intervallo $[a, b]$, all'esterno del quale φ è nulla, si chiama *supporto di* φ. E' evidente che la funzione φ è univocamente individuata non appena siano noti i valori assunti da φ sul supporto.

Si consideri poi lo spazio vettoriale D formato da tutte le funzioni reali (di variabile reale) infinitamente derivabili e a supporto compatto, ossia

$$D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\}\,.$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni test* ed è possibile definire in tale spazio una nozione di convergenza (vedi Appendice).

Si osservi poi che il supporto dipende dalla funzione φ considerata. Ad esempio la funzione α data da

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-t^2)} & \text{se } |t| < 1 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a D ed il suo supporto è $[-1, 1]$. Analogamente la funzione β data da

$$\beta(t) = \begin{cases} e^{-1/(4-t^2)} & \text{se } |t| < 2 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a D ed il suo supporto è $[-2, 2]$.

Ciò premesso si chiama *spazio delle distribuzioni* l'insieme formato da tutti i funzionali (vedi Appendice) lineari e continui definiti su D. Tale spazio si indica con il simbolo $\mathfrak{D}$ ossia

$$\mathfrak{D} = \{T : D \to \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Pertanto $T \in \mathfrak{D}$ se :

1) T è un funzionale, i.e. $T : D \to \mathbb{R}$

2) T è lineare, ossia

$$T(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 T(\varphi_1) + c_2 T(\varphi_2), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D.$$

3) T è continuo, ossia se $\{\varphi_n\} \overset{D}{\to} \varphi$, allora $\{T(\varphi_n)\} \overset{\mathbb{R}}{\to} T(\varphi)$.

2 Esempi

Sono elementi di $\mathfrak{D}$ (e quindi distribuzioni) i seguenti funzionali (dove φ indica una generica funzione di D):

1. $T_{\sin t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \sin t \; \varphi(t) \; dt$
2. $T_{t^3}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} t^3 \; \varphi(t) \; dt$
3. $T_{e^t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} e^t \; \varphi(t) \; dt.$

   In generale, **fissata** una funzione $f \in L^1_{loc}$, sono elementi di $\mathfrak{D}$ i funzionali del tipo

4. $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ \varphi(t)\ dt$,

   dove φ indica, come prima, una generica funzione di D.

   Altre distribuzioni (i.e. elementi di $\mathfrak{D}$) sono poi i funzionali

5. $\Delta_0(\varphi) = \varphi(0)$

6. $\Delta_a(\varphi) = \varphi(a)$

   dove a è un generico numero reale e φ è una generica funzione di D.

Usualmente i funzionali Δ_0, Δ_a vengono indicati con i simboli $\delta(t)$, $\delta(t-a)$.

In riferimento all'Esempio 1., il valore $T_{\sin t}(\varphi)$, assunto dal funzionale T, viene indicato con

$$T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle\ .$$

Il simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si chiama *crochet;* e la scrittura $\langle \sin t, \varphi(t) \rangle$ si legge *crochet tra* $\sin t$ *e* φ.

Pertanto le distribuzioni sopra definite negli Esempi 1., 2., 3., 4. si indicano anche con i simboli

1. $T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \sin t\ \varphi(t)\ dt$

2. $T_{t^3}(\varphi) = \langle t^3, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} t^3\ \varphi(t)\ dt$

3. $T_{e^t}(\varphi) = \langle e^t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} e^t\ \varphi(t)\ dt$.

4. $$T_f(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt, \tag{1}$$

   dove f è una fissata funzione in $\in L^1_{loc}$.

   Analogamente per le distribuzioni $\delta(t)$ e $\delta(t-a)$ si ha

5. $$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(0)$$

6. $$\langle \delta(t-a), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(a).$$

3 Le distribuzioni come estensione dello spazio L^1_{loc}

Mostriamo che lo spazio $\mathfrak{D}$ è una estensione dello spazio

$$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ assolutamente integrabile in ogni compatto di } \mathbb{R}\}.$$

Ricordiamo che in L^1_{loc} due funzioni f, g, coincidono se

$$f(t) = g(t), \qquad \text{eccetto un insieme di misura nulla.}$$

Ciò premesso si ha il seguente:

Teorema - *Siano* $f, g \in L^1_{loc}$. *Se*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\ \varphi(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)\ \varphi(t)\ dt \qquad \forall\varphi \in D \tag{2}$$

(ossia, usando le notazione con il crochet, se

$$\langle f(t), \varphi(t)\rangle = \langle g(t), \varphi(t)\rangle \qquad \forall\varphi \in D\ ) \tag{3}$$

allora f *e* g *coincidono in* L^1_{loc}. *Vale poi, ovviamente, il viceversa, ossia se* f *e* g *coincidono in* L^1_{loc}, *allora (2) [i.e.(3)] è soddisfatta.*

Da questo risultato ne segue che le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}$, definite tramite funzioni di L^1_{loc}, ossia le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}$ il cui crochet è dato da (1) sono *"tante quanti gli elementi di* L^1_{loc}*".*

In altre parole, se indichiamo con $\mathfrak{D}^*$ il sottoinsieme di $\mathfrak{D}$ formato da tutte le distribuzioni "definite tramite funzioni di L^1_{loc}", ossia il cui crochet è dato da (1), i.e.

$$\mathfrak{D}^* = \left\{T \in \mathfrak{D}\ : \exists f \in L^1_{loc} : T(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t)\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt \qquad \forall\varphi \in D\right\},$$

per il Teorema precedente, il sottospazio $\mathfrak{D}^*$ è in corrispondenza biunivoca con L^1_{loc}, ossia

$$\mathfrak{D}^* \sim L^1_{loc}$$

Quindi lo spazio delle distribuzioni $\mathfrak{D}$ può essere interpretato come una estensione di L^1_{loc}.

In altre parole, **ogni** $f \in L^1_{loc}$ può essere pensata come distribuzione (precisamente quella il cui crochet è definito da (1).

Non è difficile poi provare che si tratta di una **effettiva** estensione, in quanto esistono anche distribuzioni, ad esempio $\delta(t), \delta(t-a)$, che **non** possono essere definite tramite funzioni di L^1_{loc}, e quindi che **non** appartengono a $\mathfrak{D}^*$ (vedi Appendice).

Pertanto si ha

$$L^1_{loc} \sim \mathfrak{D}^* \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{D}$$

i.e. $\mathfrak{D}^*$ è strettamente contenuto in $\mathfrak{D}$, in quanto, come si è appena affermato, le distribuzioni $\delta(t), \delta(t-a)$, prima considerate, non sono elementi di $\mathfrak{D}^*$.

4 Convergenza nello spazio delle distribuzioni

Per analizzare le proprietà delle distribuzioni, in particolare quelle che non "provengono" da funzioni di L^1_{loc}, è utile introdurre in $\mathfrak{D}$ una nozione di convergenza. Precisamente diremo che *una successione di distribuzioni* $\{T_n\}$ *converge in* $\mathfrak{D}$ *ad una distribuzione* T *se la successione numerica* $\{T_n(\varphi)\}$ *converge a* $T(\varphi)$ *per ogni* $\varphi \in D$; ossia

$$\{T_n\} \overset{(\mathcal{D})}{\to} T \qquad \text{se} \qquad \{T_n(\varphi)\} \overset{\mathbb{R}}{\to} T(\varphi) \qquad \forall \varphi \in D$$

o, equivalentemente,

$$\lim_n T_n \overset{(\mathcal{D})}{=} T \qquad \text{se} \qquad \lim_n T_n(\varphi) \overset{\mathbb{R}}{=} T(\varphi) \qquad \forall \varphi \in D.$$

dove il simbolo $(\mathcal{D})$ significa che il limite è effettuato in $\mathfrak{D}$. Utilizzando tale nozione, si può provare il seguente Teorema (di rappresentazione):

Teorema - *Ogni distribuzione è limite (in* $\mathfrak{D}$*) di una successione di elementi di* L^1_{loc}*, ossia*

$$\overline{L^1_{loc}} = \mathfrak{D}.$$

In altre parole il Teorema precedente afferma che per **ogni** $T \in \mathfrak{D}$, esiste una successione $\{f_n(t)\}$, contenuta in L^1_{loc}, che converge in $\mathfrak{D}$ (nel senso sopra specificato) alla distribuzione T.

Ad esempio, nel corso della lezione si è provato che la distribuzione $\delta(t)$ è il limite (in $\mathfrak{D}$) della successione $\{k_n(t)\}$, dove

$$k_n(t) = \begin{cases} n & \text{se } t \in [0, 1/n] \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In altre parole la successione $\{k_n(t)\}$ converge, **nel senso delle distribuzioni,** alla distribuzione $\delta(t)$, i.e.:

$$\delta(t) \stackrel{(*)}{=} \lim_n k_n(t)$$

dove $(*)$ significa, come appena detto, che il limite è effettuato in $\mathfrak{D}$.

5 Derivata di una distribuzione

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Allora $f' \in L^1_{loc}$ e quindi f' può essere pensata come distribuzione e sia ha

$$\langle f'(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\ \varphi(t)\ dt.$$

Utilizzando la regola di integrazione per parti si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} f'(t)\ \varphi(t)\ dt = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\ \varphi'(t)\ dt = -\langle f(t), \varphi'(t) \rangle ;$$

pertanto

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \langle f'(t), \varphi(t) \rangle = -\langle f(t), \varphi'(t) \rangle .$$

Tale relazione suggerisce la seguente:

Definizione - Sia T una distribuzione; si chiama *derivata di* T (nel senso delle distribuzioni) e si indica con DT, la distribuzione definita da

$$\langle DT, \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} -\langle T, \varphi'(t) \rangle , \ \forall \varphi \in D.$$

Proprietà:

- Ogni distribuzione è derivabile infinite volte.
- Se $f \in C^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow f' \equiv Df$

- Indicata con $u = u(t)$ la funzione scalino (di Heaveside)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

si ha

$$D[u(t)] = \delta(t).$$

- $D[u(t) - u(t-a)] = \delta(t) - \delta(t-a).$

- **Teorema -** *Se* $f \in C^1(\mathbb{R}/\{t_0\})$ *e* $f,\ f\,' \in L^1_{loc}$, *allora*

$$f(t_0+) = \lim_{t \to t_0+} f(t), \qquad f(t_0-) = \lim_{t \to t_0-} f(t),$$

esistono finiti e si ha

$$Df = f\,'(t) + [f(t_0+) - f(t_0-)]\delta(t - t_0).$$

Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 5e^{2t} & \text{se } t > 0 \\ & \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha

$$Df = f\,'(t) + 5\delta(t).$$

Il teorema precedente si estende poi immediatamente al caso in cui f sia derivabile con derivata continua in tutto $\mathbb{R}$, eccetto un numero finito o un'infinità numerabile di punti.

- La distribuzione $\delta(t)$ è derivabile e si ha

$$\langle \delta'(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} -\varphi'(0),\ \forall \varphi \in D$$
$$\langle \delta''(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} \varphi''(0),\ \forall \varphi \in D$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left\langle \delta^{(n)}(t), \varphi(t) \right\rangle =_{\text{def}} (-1)^n \varphi^{(n)}(0),\ \forall \varphi \in D.$$

In modo analogo si definiscono le derivate di $\delta(t-a)$.

6 Appendice

6.1 Convergenza nello spazio delle funzioni test

La nozione di convergenza nello spazio D delle funzioni test si definisce nel seguente modo: diremo che una successione $\{\varphi_n\}$ converge a φ se:

1) $\varphi_n, \varphi \in D$;

2) esiste un intervallo limitato e chiuso $I = [a, b]$ tale che $\varphi_n(t) = \varphi(t) = 0$ se $t \notin I$;

3) la successione $\left\{\varphi_n^{(i)}\right\}$ converge uniformemente a $\varphi^{(i)}$ in $\mathbb{R}$ per $i = 0, 1, 2, 3...$

ossia fissato $\varepsilon > 0$ e fissato $i = 0, 1, 2, ...$ $\exists\ n(\varepsilon, i)$ **(indipendente da** t**)** tale che per ogni $n > n(\varepsilon, i)$ si ha $|\varphi_n^{(i)}(t) - \varphi^{(i)}(t)| < \varepsilon\ \forall t \in I$.

6.2 Funzionale

Sia V uno spazio vettoriale; si chiama *funzionale in* V ogni funzione F definita in V e a valori in $\mathbb{R}$, i.e.

$$F : V \to \mathbb{R}.$$

Ad esempio se V è lo spazio delle funzioni continue in $[0, 1]$, sono funzionali in V i seguenti (dove $x = x(t)$ indica una generica funzione continua in $[0, 1]$):

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_0^1 x(s)ds \\ F_2(x) &= \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \\ F_3(x) &= 437x(0) + 567x(1) \end{aligned}$$

Tale funzionale poi e' lineare se e' verificata la relazione

$$F(cx_1 + dx_2) = cF(x_1) + dF(x_2), \quad \forall c, d \in \mathbb{R},\ \forall x_1, x_2 \in V.$$

6.3 Lo spazio delle distribuzioni è un effettivo ampliamento di L^1_{loc}

Proviamo che

$$\mathfrak{D}^* \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{D}.$$

A tal fine è sufficiente mostrare che la distribuzione $\delta(t)$ data da

$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(0) \tag{4}$$

non appartiene a $\mathfrak{D}^*$. Per assurdo, sia $\delta(t) \in \mathfrak{D}^*$. Allora esiste $f \in L^1_{loc}$ tale che

$$\langle f(t), \varphi(t) \rangle = \langle \delta(t), \varphi(t) \rangle \text{ per } \textbf{ogni } \varphi \in D. \tag{5}$$

Poiché $f \in L^1_{loc}$, la (5) diviene

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\ \varphi(t)\ dt = \langle \delta(t), \varphi(t) \rangle \qquad \forall \varphi \in D$$

ossia, per (4)

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\ \varphi(t)\ dt = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in D. \tag{6}$$

Poiché (6) vale $\forall \varphi \in D$, (6) vale in particolare per le funzioni φ_n così definite:

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} e\ e^{-1/(1-n^2t^2)} & \text{se } |t| < 1/n \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} . \tag{7}$$

Si osservi che tutte le funzioni φ_n appartengono a D e inoltre

$$\varphi_n(0) = 1, \qquad 0 \le \varphi_n(t) \le 1.$$

Allora la (6) per le funzioni φ_n diviene

$$\int_{-1/n}^{1/n} f(t)\ \varphi_n(t)\ dt = 1. \tag{8}$$

Mostriamo che tale uguaglianza è assurda. Infatti si ha

$$\left| \int_{-1/n}^{1/n} f(t)\ \varphi_n(t)\ dt \right| \le \int_{-1/n}^{1/n} |f(t)|\ \varphi_n(t)\ dt$$

da cui, poiché $0 \le \varphi_n(t) \le 1$,

$$\left| \int_{-1/n}^{1/n} f(t)\ \varphi_n(t)\ dt \right| \le \int_{-1/n}^{1/n} |f(t)|\ dt. \tag{9}$$

Passando al limite per $n \to \infty$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1/n}^{1/n} |f(t)|\ dt = 0,$$

in quanto l'ampiezza dell'intervallo di integrazione tende a zero e $f \in L^1_{loc}$. Allora da (9) si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_{-1/n}^{1/n} f(t)\ \varphi_n(t)\ dt \right| = 0.$$

Pertanto il primo membro di (8) può essere reso piccolo a piacere e quindi **NON** può essere uguale a 1.