ANALISI MATEMATICA III ELM+TEM A.A. 2014-2015

Traccia delle lezioni del 11 e 13 maggio 2015

May 13, 2015

1 Prodotto di distribuzioni

Ricordiamo che nello spazio L^1_{loc} il prodotto non sempre è definito. Ad esempio la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t > 0 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a L^1_{loc}, ma $f^2 \notin L^1_{loc}$. Tuttavia se $f \in L^1_{loc}$ e $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora il prodotto $f\ g$ è, ovviamente, definito e si ha

$$\langle f\ g, \varphi \rangle = \langle f, g\ \varphi \rangle\,, \qquad \forall \varphi \in D.$$

Tale relazione suggerisce la seguente:

Definizione - Sia T una distribuzione e sia $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si chiama *distribuzione prodotto* $T\ g$ la distribuzione definita da

$$\langle T\ g, \varphi \rangle = \langle T, g\ \varphi \rangle\,, \qquad \forall \varphi \in D$$

Nello spazio delle distribuzioni si definisce il prodotto soltanto nel caso precedente, i.e. quando almeno uno dei due fattori è una funzione ("tradizionale") di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Pertanto, ad esempio, non si definiscono i simboli $\delta^2(t)$, $e^{-|t|}\delta(t)$, $(\log t)\delta(t)$, $t^{-7}\delta(t)$.

Provare che

$$e^{2t}\delta(t) = \delta(t);$$
$$(t^2+4)\delta(t) = 4\delta(t)$$
$$\sin t\delta(t-\frac{\pi}{2}) = \delta(t-\frac{\pi}{2}).$$

ESERCIZI

Verificare che

$$D[(3+5t)\delta'(t-1)] = -5\delta'(t-1) + 8\delta''(t-1)$$
$$(t-1)\delta'(t) = D[(\sin t)\delta'(t) - u(t)]$$
$$tDf = f(t) - 4\delta(t-2)$$

dove $f(t) = t[u(t) - u(t-2)]$.

2 Distribuzioni temperate

Si consideri lo spazio vettoriale S definito da

$$S = \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : t^j\varphi^{(k)}(t) \to 0 \text{ per } |t| \to +\infty,\ j,k = 0,1,2,....\right\}.$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni a decrescenza rapida.* Infatti una funzione φ appartiene a tale spazio se è infinitamente derivabile e tende a zero (per $t \to \pm\infty$), insieme a tutte le derivate $\varphi^{(i)}$, più velocemente di t^{-n} per ogni $n > 0$. Ad esempio, la funzione $\varphi(t) = e^{-t^2}$ appartiene a S. Invece la funzione $\varphi(t) = e^{-|t|}$ non appartiene ad S perché, pur tendendo a zero (per $t \to \pm\infty$), insieme a tutte le derivate $\varphi^{(i)}$, più velocemente di t^{-n} per ogni $n > 0$, non e' derivabile in $t = 0$. Ricordando la definizione dello spazio D delle funzioni test

$$D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\},$$

si ha

$$D \underset{\neq}{\subset} S.$$

E' poi possibile definire in S una nozione di convergenza.

Ciò premesso si consideri lo spazio formato da tutti i funzionali lineari e continui definiti su S. Tale spazio si indica con il simbolo $\Im$, ossia

$$\Im = \{T : S \to \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Tenendo conto che

$$D \underset{\neq}{\subset} S,$$

si ha allora

$$\Im \subset \mathfrak{D},$$

ossia $\Im$ è un sottospazio di $\mathfrak{D}$. Gli elementi di $\Im$ sono quindi particolari distribuzioni, che prendono nome di *distribuzioni temperate* e il sottospazio $\Im$ si chiama *spazio delle distribuzioni temperate*.

E' possibile provare che lo spazio delle distribuzioni temperate è strettamente contenuto in $\mathfrak{D}$. Infatti le funzioni

$$e^t, \; e^{-t}, \; \sinh t, \; \cosh t. \; e^t u(t), \; e^{-t} u(-t),$$

pur essendo funzioni in L^1_{loc}, e quindi distribuzioni, ossia elementi di $\mathfrak{D}$, **non** sono distribuzioni temperate. Pertanto lo spazio delle distribuzioni temperate è un sottospazio proprio dello spazio delle distribuzioni, ossia

$$\Im \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{D}.$$

E' possibile provare che sono distribuzioni temperate (i.e. elementi di $\Im$):

1. le funzioni $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ (quindi, in particolare, sono distribuzioni temperate tutte le funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$);

2. le funzioni $f \in L^1_{loc}$ e **a crescita lenta**, ossia tali che $\exists \; M, q \geq 0$: $|f(t)| \leq M(1 + |t|^q)$;

3. le funzioni $f \in L^1_{loc}$ e periodiche;

4. le distribuzioni $\delta(t)$, $\delta(t - a)$;

5. se $T \in \Im$ allora $DT \in \Im$ (in particolare quindi sono distribuzioni temperate $\delta^{(n)}(t)$, $\delta^{(n)}(t - a)$.

Si osservi che, in virtù di 2., sono distribuzioni temperate le funzioni costanti, i polinomi, le funzioni $\sin t$, $\cos t$.

Esercizio: stabilire quali delle seguenti funzioni in L^1_{loc} sono distribuzioni temperate

$$f_1(t) = e^t u(t); \quad f_2(t) = e^{-t} u(t)$$
$$f_3(t) = e^t u(-t) : \quad f_4(t) = e^{-t} u(-t).$$

Esercizio: Le funzioni a crescita lenta sono distribuzioni temperate, ma esistono anche distribuzioni temperate la cui crescita non e' "lenta", in senso stretto. Ad esempio si provi che la funzione di L^1_{loc}

$$f(t) = e^t \cos(e^t)$$

è una distribuzione temperata. Suggerimento: si osservi che f è la derivata della funzione a crescita lenta $g(t) = \sin\,(e^t)$ ....

3 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Sia $\varphi \in S$. Essendo φ a decrescenza rapida, si ha $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi φ ammette trasformata di Fourier. Sia pertanto Φ la sua trasformata, ossia $\Phi(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi\}$. Usando le proprietà della trasformata di Fourier in L^1, è possibile provare che "lo spazio S è chiuso rispetto all'operatore trasformata di Fourier", ossia che vale il seguente:

Lemma - *Sia $\varphi \in S$. Allora $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e, indicata con Φ la sua trasformata di Fourier, si ha $\Phi \in S$.*

Si ha poi il seguente:

Teorema - *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ e sia F la sua trasformata di Fourier, ossia $F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}$. Allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\varphi(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\Phi(\omega) d\omega, \ \forall \varphi \in S$$

ossia

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle f, \Phi \rangle \,, \ \forall \varphi \in S$$

o, equivalentemente,

$$\langle \mathcal{F}\{f\}, \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}\{\varphi\}\rangle, \ \forall \varphi \in S.$$

Tale Teorema suggerisce la seguente:

Definizione - Sia T una distribuzione temperata; si chiama *trasformata di Fourier di T* (nel senso delle distribuzioni) e si indica con $\mathcal{F}_D\{T\}$, la distribuzione temperata definita da

$$\langle \mathcal{F}_D\{T\}, \varphi\rangle =_{\text{def}} \langle T, \mathcal{F}\{\varphi\}\rangle, \ \forall \varphi \in S.$$

Tale definizione riconduce quindi il calcolo della trasformata $\mathcal{F}_D$ a quello della trasformata "classica" $\mathcal{F}$ (i.e. in L^1 o L^2).

Dal Teorema precedente si ha poi la seguente proprietà

- Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}_D\{f\} \equiv \mathcal{F}\{f\}$,ossia se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora la trasformata nel senso delle distribuzioni di f **coincide** con quella "classica".

La definizione precedente acquista quindi significato per gli elementi che **non** appartengono a $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$.

4 Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate "elementari"

La seguente tabella, provata a lezione, fornisce la trasformata di Fourier, nel senso delle distribuzioni, di alcune funzioni"elementari" a crescita lenta ($A \in \mathbb{R}$):

funzione $\to$	trasformata	
1	$2\pi\delta(\omega)$	
t	$2\pi j\delta'(\omega)$	
t^n	$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$	
e^{jAt}	$2\pi\delta(\omega - A)$,	$A \in \mathbb{R}$
$\sin(At)$	$\pi j[\delta(\omega + A) - \delta(\omega - A)]$,	$A \in \mathbb{R}$
$\cos(At)$	$\pi[\delta(\omega + A) + \delta(\omega - A)]$,	$A \in \mathbb{R}$

Per la distribuzione $\delta(t)$ si ha poi

$$\mathcal{F}_D\left\{\delta(t)\right\} = 1$$
$$\mathcal{F}_D\left\{\delta(t-a)\right\} = e^{-ja\omega},\ a \in \mathbb{R}.$$

Vale infine la proprietà

$$\text{Se } T \text{ è una distr. temperata, allora} \quad \mathcal{F}_D\left\{DT\right\} = j\omega\mathcal{F}_D\left\{T\right\}. \tag{1}$$

Esercizio: Utilizzando i crochets, provare (1).
Esercizio: Calcolare la Trasformata di Fourier delle distribuzioni

$$T_1 = \sin(t+1)\delta(t);\ T_2 = t\delta'(t-1);\ T_3 = D(e^{t-3}\delta(t));$$
$$T_4 = D(e^t\delta(t-3));\ T_5 = e^{t-3}\delta'(t); T_6 = e^{5t}\delta'(t-1) + \delta'(t-2).$$