# ANALISI MATEMATICA III
# A.A. 2014-2015
## Traccia della lezione del 18 maggio 2015

May 19, 2015

## 1 Trasformata di Laplace di distribuzioni

Prima di introdurre la trasformata di Laplace nel senso delle distribuzioni, poniamo le seguenti definizioni.

**Definizione 1** - Sia $T$ una distribuzione, ossia $T \in \mathfrak{D}$. Allora $T$ si dice *nulla in un intervallo* $(a, b)$ se

$$< T, \varphi(t) >= 0$$

per ogni $\varphi \in D$ e avente supporto contenuto in $(a, b)$.

**Definizione 2** - Sia $T$ una distribuzione, ossia $T \in \mathfrak{D}$. Si chiama *insieme nullo di* $T$, e si indica con $N_T$, l'unione di tutti gli intervalli aperti $(a, b)$ in cui $T$ è nulla. Il suo complementare in $\mathbb{R}$ si chiama poi *supporto di* $T$.

Poiché $N_T$ è unione (infinita) di aperti, $N_T$ è un insieme aperto di $\mathbb{R}$. Il supporto di $T$, essendo il complementare di un aperto è allora un insieme chiuso di $\mathbb{R}$.

Esempi

1. Sia $f$ la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 4 & \text{se } t \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Allora $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e quindi $f$ è una distribuzione. L'insieme nullo $N_f$ è

$$N_f = (-\infty, -\pi) \cup (\pi, +\infty)$$

e, di conseguenza, il supporto di $f$ è $[-\pi, \pi]$ (come ovviamente era lecito attendersi).

2. Sia $f$ la funzione

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{se } t \geq 0 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Allora $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e quindi $f$ è una distribuzione. L'insieme nullo $N_f$ è

$$N_f = (-\infty, 0)$$

e. di conseguenza, il supporto di $f$ è $[0, +\infty)$ (come ovviamente era lecito attendersi).

3. Per la distribuzione $\delta$ si ha poi $N_\delta = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e quindi il supporto di $\delta$ è $\{0\}$. Analogamente il supporto di $\delta(t-a)$ è $\{a\}$.

Ciò posto, si ha la seguente:

**Definizione -** Sia $T$ una distribuzione tale che:
1) il supporto di $T$ è contenuto in $[0, +\infty)$;
2) esiste $\beta \in \mathbb{R}$ tale che

$$Te^{-\beta t} \quad \text{è una distribuzione temperata.} \tag{1}$$

Sia $\alpha_T$ l'estremo inferiore delle costanti $\beta$ soddisfacenti (1). Si chiama *trasformata di Laplace (nel senso delle distribuzioni) di* $T$, e si indica con $L_D[T]$, il crochet

$$L_D[T] = \left\langle Te^{-\beta t}, e^{\beta t}\lambda(t)e^{-st} \right\rangle \tag{2}$$

dove $\operatorname{Re} s > \beta > \alpha_T$ e $\lambda$ è una funzione tale che

$$\begin{array}{lll} \lambda \in C^\infty(\mathbb{R}) & & \\ \lambda(t) = 1 & \text{se } t \geq \varepsilon & (\varepsilon < 0) \\ \lambda(t) = 0 & \text{se } t \leq \sigma, & (\sigma < \varepsilon < 0). \end{array} \tag{3}$$

Si può provare che il crochet (2) è indipendente dalla scelta della funzione $\lambda$ (purché siano verificate le condizioni (3)) e dalla scelta di $\beta$. Il crochet (2) dipende invece dal numero complesso $s$ ed è quindi una funzione complessa $F(s)$, ossia

$$L_D[T] = F(s) = \left\langle Te^{-\beta t}, e^{\beta t}\lambda(t)e^{-st} \right\rangle .$$

. Pertanto la trasformata di Laplace di una distribuzione $T$ è una **funzione "tradizionale"**, non una distribuzione, come accade invece per la trasformata di Fourier.

Si osservi poi che, per le ipotesi fatte, il primo elemento del crochet, ossia $Te^{-\beta t}$ è una distribuzione temperata, mentre il secondo, i.e. $e^{\beta t}\lambda(t)e^{-st}$, è una funzione a decrescenza rapida, ossia un elemento di $S$.

## 1.1 Relazione con la trasformata "classica"

Ricordiamo quanto visto nelle passate lezioni per la trasformata di Laplace "in senso classico".

*Sia $f \in \Lambda^1$, ossia tale che:*

$$\begin{gathered} 1) \qquad f(t) = 0 \quad \text{se} \quad t < 0; \\ 2) \text{ esiste } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R}) \end{gathered} \tag{4}$$

*e sia $\alpha_f$ la sua ascissa di convergenza, i.e.*

$$\alpha_f = \inf \left\{ x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R}) \right\} .$$

*Allora per ogni $x > \alpha_f$, la trasformata di Fourier di $f(t)e^{-xt}$, **coincide** con la trasformata di Laplace $L[f]$ di $f$, ossia*

$$L[f(t)] = \mathfrak{F}\left\{ f(t)e^{-xt} \right\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{5}$$

*dove $s$ è un qualunque numero complesso con* $\operatorname{Re} s = x (> \alpha_f)$.

Ciò premesso, vale la seguente: **Proprietà.** *Se $f$ soddisfa (4), allora la trasformata di Laplace di $f$ (in senso classico) **coincide** con la trasformata di Laplace nel senso delle distribuzioni.* In altre parole:

$$L_D[f] \equiv L[f].$$

Pertanto la definizione (2) assume significato quando, ferme restando le altre condizioni, $T$ non sia una funzione di classe $\Lambda^1$.

## 1.2 Esempi

Un semplice calcolo prova che:

$$\begin{gathered}
L_D[\delta(t)] = 1 \\
L_D[\delta'(t)] = s \\
\dots\dots\dots \\
L_D[\delta^{(n)}(t)] = s^n.
\end{gathered}$$

Inoltre

$$L_D[\delta(t-a)] = e^{-sa},\ a > 0.$$

## 1.3 Funzioni razionali

Il seguente risultato generalizza quello visto alcune lezioni fa'.

**Teorema** *Ogni funzione razionale*

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

*è una trasformata di Laplace. Precisamente, se grado* $N <$ *grado* $D$, $F$ *è la trasformata di Laplace una funzione di classe* $\Lambda^1$; *altrimenti, se grado* $N \geq$ *grado* $D$, $F$ *è la trasformata di Laplace di una distribuzione.*

Ad esempio le funzioni

$$F_1(s) = \frac{s^3+8}{s^2+3s+2}, F_2(s) = \frac{s^3+8}{s^3+3s+2}$$

sono trasformate di una distribuzione, mentre

$$F_3(s) = \frac{s^2+8}{s^3+3s^2+2}$$

è la trasformata di una funzione di classe $\Lambda^1$.

Quando *grado* $N \geq$ *grado* $D$, il calcolo della antitrasformata di $F = N/D$ si effettua effettuando preliminarmente la divisione tra i due polinomi $N$ e $D$ e poi usando la tabella precedente e il metodo visto nelle passate lezioni.

In particolare, per la funzione $F_1$, effettuando la divisione si ottiene

$$F_1(s) = s - 3 + \frac{7s+14}{s^2+3s+2}.$$

L'antitrasformata è quindi

$$\delta'(t) - 3\delta(t) + g(t)$$

dove $g$ è l'antitrasformata di

$$\frac{7s+14}{s^2+3s+2} \tag{6}$$

Essendo (6) una funzione razionale propria, la funzione $g$ si calcola con la teoria dei residui.

## 1.4 Derivazione

Ricordiamo il seguente:

**Teorema (derivazione "in senso classico")** *Sia* $g \in C^1(0, +\infty), g, g' \in \Lambda^1$. *Allora si ha:*

$$L[g'] = sL[g] - g(0+)\ ; \tag{7}$$

nell'ambito delle distribuzioni vale il seguente

**Teorema (derivazione "nel senso delle distribuzioni")** *Sia* $g \in \Lambda^1$. *Se* $Dg$ *ammette trasformata di Laplace, allora*

$$L_D[Dg] = sL[g].$$

Se $g \notin C^1(0, +\infty)$, allora (7) può non valere. A tal fine è sufficiente considerare la funzione

$$h(t) = u(t) - u(t-5).$$

Per tale funzione si ha poi

$$Dh = \delta(t) - \delta(t-5)$$

e quindi

$$L_D[Dh] = 1 - e^{-5s}.$$

D'altra parte

$$L[h] = \int_0^5 e^{-st} dt = \frac{1}{s} - \frac{e^{-5s}}{s}$$

e quindi $L_D[Dh] = sL[h]$.