APPLICAZIONI di MATEMATICA

A.A. 2015-2016

Traccia delle lezioni del 5 e 9 ottobre 2015

October 9, 2015

1 Singolarità

Definizione 1 - Un punto s_0 si dice **punto singolare per** f se non esiste alcun intorno I di s_0 tale che f sia analitica in **TUTTO** I .

Definizione 2 - Sia s_0 un punto singolare per f . Allora s_0 si dice **punto singolare isolato** (o **singolarità isolata**) se esiste un intorno I di s_0 tale che f sia analitica in $I \setminus \{s_0\}$ (i.e. f è analitica in tutto I eccetto s_0). Altrimenti il punto s_0 si dice **non isolato** (o **punto di accumulazione**).

Esempi :

$$f_1(s) = \frac{s^2 + 1}{(s - 2)(s - 4)^3} \Rightarrow s = 2, s = 4 \text{ sono sing. isolate.}$$

$$f_2(s) = \bar{s} \quad \Rightarrow \text{ogni punto } s \in \mathbb{C} \text{ è una sing. non isolata}$$

$$f_3(s) = \frac{1 - \cos s}{s^2} \Rightarrow s = 0 \text{ è singolarità isolata}$$

$$f_4(s) = \sin(1/s) \Rightarrow s = 0 \text{ è sing. isolata}$$

$$f_5(s) = \frac{1}{\sin(1/s)} \Rightarrow s = 0 \text{ è sing. non isol., } s_k = \frac{1}{k\pi} \text{ sono sing. isol. } (k \neq 0).$$

Per quanto riguarda l'ultimo esempio, il ragionamento si basa anche sulla seguente proprietà delle funzioni trigonometriche in campo complesso: "gli

zeri della funzione seno (o coseno) in $\mathbb{C}$ coincidono con gli zeri della funzione seno (o, rispettivamente, coseno) in $\mathbb{R}$."

Definizione 3 - Sia s_0 una singolarità isolata per f . Allora s_0 si chiama:
 ◆ **singolarità eliminabile** se

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) \text{ esiste finito:}$$

◆ **singolarità polare** se

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = \infty;$$

◆ **singolarità essenziale** se

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) \text{ non esiste.}$$

◆ Nel caso in cui s_0 sia una singolarità polare, allora s_0 si dice **polo di ordine** $N > 0$ (con N numero naturale) se

$$\lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0)^N f(s) \text{ è finito e diverso da } 0 .$$

In riferimento agli esempi di prima si ha: la funzione f_1 ha in $s = 2$ un polo semplice e in $s = 2$ un polo triplo. La funzione f_3 ha in $s = 0$ una sing. eliminabile. La funzione f_4 ha in $s = 0$ una singolarità essenziale. La funzione f_5 ha in $s_k = 1/(k\pi)$ ($k \neq 0$) singolarità polari semplici.

2 Serie di Laurent

Teorema di Laurent Sia f una funzione analitica in un intorno I di s_0 , eccetto, al più s_0 , ossia $f \in \mathbf{C}^1(I/\{s_0\})$. Ciò posto, per $s \in I/\{s_0\}$ si ha

$$f(s) = \underbrace{\dots \frac{c_{-k}}{(s - s_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{s - s_0}}_{(+)} + \underbrace{c_0 + c_1(s - s_0) + \dots + c_k(s - s_0)^k + \dots}_{(*)} \quad (1)$$

dove i coefficienti c_k (chiamati coefficienti di Laurent) sono dati dalla formula

$$c_k = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s - s_0)^{k+1}} ds \quad (2)$$

e γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo, interna all'intorno I e contenente al proprio interno il punto s_0 .

La serie (1) si chiama serie di Laurent in s_0 ; la serie di Laurent in s_0 è quindi una serie di potenze del binomio $(s - s_0)$ ad esponente intero (positivo, negativo, nullo). In particolare, la serie (+) in (1), relativa alle potenze del binomio $(s - s_0)$ ad esponente negativo si chiama **parte principale** della serie di Laurent e la parte (*) rimanente si dice **parte analitica**.

PROPRIETA':

- ◆ Lo sviluppo in serie di Laurent è unico.
- ◆ La serie di Laurent è derivabile termine a termine in ogni insieme chiuso contenuto in $I \setminus \{s_0\}$.

Dal Teorema di Laurent si ha il seguente:

Corollario 1 (Taylor). *Sia f analitica in tutto I , s_0 compreso. Allora per ogni $s \in I$ si ha*

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (s - s_0)^k = c_0 + c_1 (s - s_0) + \dots + c_k (s - s_0)^k + \dots \quad (3)$$

La formula (3) esprime il fatto che una funzione analitica in un intorno I di un punto s_0 è in tale intorno sviluppabile in serie di potenze e tale serie (i.e. (3)) si chiama *serie (o sviluppo) di Taylor di f in s_0* .

Utilizzando la proprietà che lo sviluppo di Taylor (3) è unico, si ottengono poi i seguenti sviluppi "notevoli":

$$\begin{aligned}
 e^s &= 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \dots + \frac{s^n}{n!} + \dots & \forall s \in \mathbb{C} \\
 \sin s &= s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots & \forall s \in \mathbb{C} \\
 \cos s &= 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{s^{2n}}{(2n)!} + \dots & \forall s \in \mathbb{C} \\
 \frac{1}{1-s} &= 1 + s + s^2 + \dots + s^n + \dots & \forall s : |s| < 1.
 \end{aligned}$$

Dalla sviluppabilità in serie di Taylor, discende poi il seguente risultato, già parzialmente anticipato nelle prime lezioni.

Corollario - Sia V un intorno di s_0 e sia f una funzione, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Allora le seguenti quattro affermazioni sono **equivalenti**:

- 1) $f \in C^1(V)$ [i.e. f è analitica in V];
- 2) le funzioni u, v ($u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$) sono derivabili parzialmente in V con derivate continue ed inoltre in V valgono le formule (di Cauchy-Riemann):

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= v_y(x, y) \\ u_y(x, y) &= -v_x(x, y); \end{aligned}$$

- 3) $f \in C^\infty(V)$;
- 4) f è sviluppabile in serie di potenze in V .

Si osservi che nell'ambito dell'analisi reale in generale il precedente risultato può non essere vero, nel senso che esistono funzioni (reali di variabile reale) di classe C^∞ in un intervallo, ma non sviluppabili in serie di potenze in tale intervallo. Inoltre, chiaramente, esistono poi funzioni che sono derivabili soltanto un numero finito di volte. Pertanto, nell'ambito dell'analisi reale, in riferimento al corollario precedente si ha

$$\begin{aligned} 1) &\not\Rightarrow 3) \\ 3) &\not\Rightarrow 4). \end{aligned}$$

Il Teorema di Laurent fornisce una equivalente classificazione delle singolarità isolate. Vale infatti il seguente:

Teorema (IMPORTANTE!!) Sia s_0 una singolarità isolata per f . Allora:

- (i) s_0 è singolarità eliminabile se e solo se la parte principale della serie di Laurent associata non c'è (i.e. $c_k = 0$ per ogni indice $k < 0$);
- (ii) s_0 è singolarità polare di ordine $N (> 0)$ se e solo se nella serie di Laurent associata si ha $c_{-N} \neq 0$ e $c_{-k} = 0$ per ogni indice $k > N$ (e quindi la parte principale è composta da un numero finito di termini);
- (iii) s_0 è singolarità essenziale se e solo se la parte principale della serie di Laurent associata ha infiniti termini non nulli.

Attenzione a non confondere l'ordine del polo N con il numero degli elementi non nulli della parte principale della serie di Laurent. Analogamente, nel caso di singolarità essenziali la parte principale ha sì infiniti termini, ma non è detto che TUTTI i coefficienti c_{-i} , con $i > 0$, siano non nulli.

ESERCIZI

1. Usando la derivabilità termine a termine della serie (3) e l'unicità dello sviluppo in serie di Taylor, si provi il seguente risultato:

Corollario 2. *Sia f analitica in tutto V , s_0 compreso e sia (3) la serie di Taylor associata. Allora*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!}.$$

2. Si consideri la funzione $f(s) = s \sin(1/s)$. Sviluppando f in serie di Laurent in un intorno di $s = 0$ si ha

$$f(s) = s \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{3!} \frac{1}{s^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{s^5} + \dots \right) = 1 - \frac{1}{3!} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{5!} \frac{1}{s^4} + \dots$$

Poiché la parte principale di tale sviluppo ha infiniti termini, allora $s = 0$ è una singolarità essenziale per $f(s) = s \sin \frac{1}{s}$.

3 Classificazione del punto all'infinito.

La classificazione delle singolarità al finito si estende con facilità al punto all'infinito. Precisamente:

Definizione - *Il punto $s = \infty$ si dice singolarità (isolata o non isolata e, nel primo caso, eliminabile, polare o essenziale) se lo è il punto $u = 0$ per la funzione $g(u) = f(1/u)$.*

Esempi - Classificare il punto $s = \infty$ per le funzioni razionali

$$f(s) = \frac{2s}{9s+1}, \quad g(s) = \frac{2s^5}{9s+1}, \quad h(s) = \frac{2s}{9s^3+1}.$$

Per la funzione f , il punto $s = \infty$ è un punto di regolarità e così per h (in quest'ultimo caso $s = \infty$ è anche uno zero doppio). Per la funzione g , il punto $s = \infty$ è un polo di ordine 4.

In generale, una funzione razionale (i.e. il rapporto tra due polinomi N e D)

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

ha un polo in $s = \infty$ di ordine $p > 0$ se e solo se $\text{grado}N - \text{grado}D = p$.

Esercizio - Classificare $s = \infty$ per le funzioni seguenti:

$$f(s) = e^{1/s} \quad (s = \infty \text{ punto "regolare"})$$

$$f(s) = s \sin\left(\frac{1}{s}\right) \quad (s = \infty \text{ sing. elim.})$$

$$f(s) = \frac{1}{\sin s} \quad (s = \infty \text{ sing. non isolata})$$

$$f(s) = e^s \quad (s = \infty \text{ sing. essenziale})$$

$$f(s) = \frac{s^3 + 1}{s + 4} \quad (s = \infty \text{ polo di ordine 2}).$$

Nella classificazione delle singolarità si rivelano particolarmente utili i seguenti:

Teorema Ogni funzione **non** razionale ha singolarità essenziali e/o non isolate. Viceversa, se una funzione ha almeno una singolarità essenziale o non isolata, allora tale funzione è **non** razionale.

Corollario Sia f una funzione razionale. Allora f è costante oppure ha **soltanto** singolarità di tipo eliminabile e/o polare.

Esercizio : Classificare le singolarità di

$$f_1(s) = \frac{\sin s}{(s-4)(e^s-1)}, f_2(s) = \frac{5s^2-s}{e^{4js}-1}.$$

4 Residui

Sia s_0 una singolarità isolata per f . Allora, come si è visto, esiste un intorno V di s_0 tale che f è analitica in $V/\{s_0\}$ e f è sviluppabile in serie di Laurent

in tale intorno, ossia $\forall s \in V/\{s_0\}$ si ha

$$f(s) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (s - s_0)^n$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s - s_0)^{n+1}} ds \quad (4)$$

e γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo, interna all'intorno V e contenente al proprio interno il punto s_0 .

Si chiama *Residuo di f in s_0* , e si indica con $\text{Res}[f, s_0]$ il numero

$$\text{Res}[f, s_0] = c_{-1}$$

dove c_{-1} è il coefficiente della serie di Laurent associata, relativo al termine $(s - s_0)^{-1}$.

Da (4) ne segue allora

$$\text{Res}[f, s_0] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} f(s) ds.$$

Il Teorema di Cauchy, visto nelle lezioni scorse, può allora essere riformulato nel modo seguente:

1° Teorema dei Residui *Sia Γ una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo. Sia f analitica all'interno di Γ eccetto un numero FINITO di punti $s_1, s_2, \dots, s_N$. Sia infine f continua su Γ . Allora*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(s) ds = \text{Res}[f, s_1] + \text{Res}[f, s_2] + \dots + \text{Res}[f, s_N].$$

5 Formule per il calcolo dei Residui

Si ha:

$$s_0 \text{ sing. eliminabile} \implies \text{Res}[f, s_0] = 0; \quad (*)$$

$$s_0 \text{ polo semplice} \implies \text{Res}[f, s_0] = \lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0) f(s)$$

$$s_0 \text{ polo ordine } N > 1 \implies$$

$$\text{Res}[f, s_0] = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{ds^{N-1}} [(s - s_0)^N f(s)] \quad (**)$$

Si osservi che il viceversa dell'implicazione (*) puo' essere falso. Ad esempio la funzione

$$f(s) = \frac{1}{s^3} \quad (5)$$

ha in $s = 0$ un polo del terzo ordine. Poiché lo sviluppo in serie di Laurent di f in un intorno di $s = 0$ **coincide** con (5) (ricordiamo che tale sviluppo è una serie di potenze di s , con esponente positivo o negativo), si ha $c_{-1} = 0$ e, di conseguenza, $\text{Res}[f, 0] = 0$. Alla stessa conclusione si puo' giungere utilizzando la formula (**).

Si osservi infine che se s_0 è un polo semplice per f allora necessariamente il limite

$$\lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0) f(s)$$

esiste finito e non nullo. Pertanto, in tal caso $\text{Res}[f, s_0] \neq 0$. Se invece s_0 è un polo di ordine $N > 1$, allora può aversi $\text{Res}[f, s_0] = 0$. Si dia un esempio in proposito.

Esempio n. 1 Calcolare ($\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$)

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{2s + 1}{s(s + 4)(s + 1)^2} ds.$$

Soluzione: le singolarità della funzione integranda interne a γ sono $s = 0$ e $s = -1$. Si ha poi che $s = 0$ è un polo semplice e $s = -1$ è un polo doppio. Pertanto

$$I_1 = \text{Res}[f, 0] + \text{Res}[f, -1]$$

e

$$\begin{aligned} \text{Res}[f, 0] &= \lim_{s \rightarrow 0} s f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s + 1}{(s + 4)(s + 1)^2} = \frac{1}{4} \\ \text{Res}[f, -1] &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} [(s + 1)^2 f(s)] = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \frac{2s + 1}{s(s + 4)} = \frac{-4}{9}. \end{aligned}$$

Esempio n. 2 Calcolare ($\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$)

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{\sin s}{s^3 + 6s^2 + 8s} ds.$$

Soluzione: le singolarità della funzione integranda interne a γ sono $s = 0$ e $s = -2$. Si ha poi che $s = 0$ è eliminabile e $s = -2$ è un polo semplice. Pertanto

$$I_2 = \text{Res}[f, 0] + \text{Res}[f, -2]$$

e

$$\begin{aligned} \text{Res}[f, 0] &= 0 \\ \text{Res}[f, -2] &= \lim_{s \rightarrow -2} (s + 2) f(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{\sin s}{s(s + 4)} = \frac{\sin 2}{4}. \end{aligned}$$

Esempio n. 3 Calcolare ($\gamma(t) = 8e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$)

$$I_3 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{\sin s}{s^2 - 7s} ds.$$

Soluzione: le singolarità della funzione integranda sono $s = 0$ e $s = 7$. Entrambe sono interne a γ . Si ha poi che $s = 0$ è eliminabile e $s = 7$ è un polo semplice. Pertanto

$$I_2 = \text{Res}[f, 0] + \text{Res}[f, 7]$$

e

$$\begin{aligned} \text{Res}[f, 0] &= 0 \\ \text{Res}[f, 7] &= \lim_{s \rightarrow 7} (s - 7) f(s) = \lim_{s \rightarrow 7} \frac{(s - 7) \sin s}{s(s - 7)} = \frac{\sin 7}{7}. \end{aligned}$$

Esempio n. 4 Provare che $(\gamma(t) = 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi])$

$$I_4 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{s}{e^{2s} - 1} ds = 0.$$

Esempio n. 5 Provare che $(\gamma(t) = 5e^{jt}, t \in [0, 2\pi])$

$$I_5 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{4}{(s-4)^2 s} ds = 0.$$

Soluzione: le singolarità sono $s = 4$ (polo semplice); $s = 0$ (eliminabile); $s_k = 2k\pi j, k \neq 0$, (poli semplici); $s = \infty$ (non isolata).