APPLICAZIONI di MATEMATICA
A.A. 2015-2016

Traccia delle lezioni del 2 e 6 novembre 2015

November 7, 2015

1 Trasformata Zeta

Dal volume M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

- La proprietà della traslazione - Cap. 3.6: Definizione 3.3 , Prop. 3.9, Esempio 3.5.

- La convoluzione discreta - Cap. 3.7 : Definizione. 3.4, Teorema 3.2, Esempio 3.6.

  Conseguenze :

  Corollario 1 *Se $F(z)$ è la trasformata Zeta di $\{f_n\}$, allora la trasformata Zeta di $\{\sum_{k=0}^{n} f_k\}$ è*

  $$\frac{z}{z-1}F(z).$$

  Corollario 2 *Se $F(z)$, $G(z)$ sono le trasformate Zeta di $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$, rispettivamente, allora l'antitrasformata Zeta di $F(z)H(z)$ è la convoluzione discreta $\{f_n * g_n\}$.*

- Applicazioni del Corollario 2 al calcolo dell'antitrasformata zeta nel caso non razionale: Esempio 3.15

- La proprietà del valore finale - Cap. 3.10 : Teorema 3.6 e osservazione 3.2

- Esercizi:

  1) Si dia un esempio di convoluzione discreta $\{f_n * g_n\}$ il cui raggio di convergenza è minore del minimo tra i raggi di $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$.

  2) Calcolare la trasformata Zeta della successione

$$f_n = (-1)^n e^{2n} \sin(3n)$$

- Trasformata Zeta ed equazioni alle differenze : Cap. 3.1.

- Il teorema del campionamento (cenni) - Cap. 3.14: Teorema 3.9

- Esercizi:

A) Calcolare la trasformata Zeta dei seguenti campionamenti, determinando anche il raggio di convergenza.

$$f_n = \begin{cases} 4n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \quad : \quad F(z) = \frac{8z^2}{(z^2-1)^2};$$

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ e^{3n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \quad : \quad F(z) = \frac{e^3}{z(1-e^6 z^{-2})};$$

$$f_n = \begin{cases} e^{3n} & \text{se } n = 0, 5, 10, 15, 20, ... \\ 2 & \text{se } n = 1, 6, 11, 16, 21, ... \\ n & \text{se } n = 2, 7, 12, 17, 22, ... \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad ; \; f_n = \begin{cases} \pi & \text{se } n = 3k, k \in \mathbb{N} \\ n & \text{se } n = 3k+1, k \in \mathbb{N} \\ 2^n & \text{se } n = 3k+2, k \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

A titolo di esempio si vedano anche gli esercizi negli Esempi 3.2, 3.3 e 3.4 e il relativo svolgimento.

2 La Trasformata di Laplace nell'analisi di reti elettriche

- Introduzione (Cap. 1 - paragrafo 1.1).

- **Funzioni di classe Λ^1- Definizione 1** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Diremo che $f \in \Lambda^1$ se:

$$\begin{aligned} &1) \quad f(t) = 0 \quad \text{se} \quad t < 0; \\ &2) \text{ esiste } x \in \mathbb{R} \text{ tale che } \int_0^\infty |f(t)|e^{-xt}dt < \infty. \end{aligned} \tag{1}$$

E' evidente che se $\int_0^\infty |f(t)|e^{-xt}dt < \infty$, allora $\int_0^\infty |f(t)|e^{-yt}dt < \infty$. per ogni $y > x$. Si chiama *ascissa di convergenza di* f, e si indica con α_f, il numero

$$\alpha_f = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tale che } \int_0^\infty |f(t)|e^{-xt}dt < \infty. \right\}.$$

Ad esempio, indicata con $u = u(t)$ la funzione scalino, i.e.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases},$$

si ha $u(t) \in \Lambda^1$ e $\alpha_u = 0$. Per le funzioni

$$\begin{aligned} &f_1(t) = e^{5t}u(t), \quad f_2(t) = tu(t), \quad f_3(t) = \sin t\ u(t), \\ &f_4(t) = e^{-9t}u(t), \quad f_5(t) = t^2u(t), \quad f_6(t) = u(t) - u(t-7) \end{aligned}$$

si ha rispettivamente

$$\alpha_{f_1} = 5, \quad \alpha_{f_2} = \alpha_{f_3} = 0, \ \alpha_{f_4} = -9, \ \alpha_{f_5} = 0, \quad \alpha_{f_6} = -\infty.$$

Invece la funzione

$$g(t) = \begin{cases} \exp t^2 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

non appartiene a Λ^1. Si veda inoltre il Cap. 1 - paragrafo 1.2, in cui la trasformata di Laplace è definita in modo leggermente diverso, ossia per funzioni di classe Λ. E' facile verificare che se $f \in \Lambda^1$, allora $f \in \Lambda$, ma in generale non vale il viceversa. Quindi la Definizione 1 data sopra risulta più generale.

- Definizione di trasformata di Laplace e analiticità (Cap. 1, paragrafo 1.3, Prop. 1.1 e Prop. 3.1). Inoltre:

- **Proposizione** *La trasformata di Laplace F ha almeno un punto singolare sulla retta* $\mathrm{Re}\, s = \alpha_f$ *(nel caso in cui $\alpha_f = -\infty$ tale punto singolare è $s = \infty$).*