

# APPLICAZIONI di MATEMATICA

## A.A. 2015-2016

### ESERCIZI parte 4

October 30, 2015

## 1 Trasformata Zeta

**Esercizio 1.1-a)** Calcolare la trasformata Zeta dei seguenti campionamenti

$$\begin{array}{ll} f_n = (-1)^n(n+1); & f_n = (n+4)\cos(5n); \\ f_n = ne^{7n}\sin 4n; & f_n = 2^n; \\ f_n = (-1)^n ne^{-8n}; & f_n = (-1)^n \sin n; \\ f_n = (-1)^n n \cos 6n; & f_n = (-1)^n 4^n \sin n. \end{array}$$

**Esercizio 1.1-b)** Calcolare la trasformata Zeta dei seguenti campionamenti

$$\begin{array}{ll} f_n = \begin{cases} e^{2n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} & ; \quad f_n = \begin{cases} e^{-n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \pi & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \\ f_n = \begin{cases} 4n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 6 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} & ; \quad f_n = \begin{cases} ne^{3n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \\ f_n = \begin{cases} 4n & \text{se } n = 5k, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} & ; \quad f_n = \begin{cases} ne^{3n} & \text{se } n = 4k, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\ f_n = \begin{cases} e^{2n} & \text{se } n = 3k, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} & ; \quad f_n = \begin{cases} e^{-n} & \text{se } n = 7k, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{array}$$

Verificare poi il risultato ottenuto calcolando l'antitrasformata Zeta.

**Esercizio 1.1-c)** Per ciascuno dei campionamenti  $\{f_n\}$  di cui all'Esercizio 1.1-b), calcolare il raggio di convergenza. Calcolare poi la trasformata Zeta

delle seguenti convoluzioni

$$f_n * n; \quad f_{n-3} * e^n; \quad e^{7n} f_{n-5} * 1$$

e determinare il raggio di convergenza di tali convoluzioni, analizzando le singolarità della trasformata trovata.

**Esercizio 1.2** Quale o quali delle seguenti funzioni è una trasformata Zeta? In caso affermativo, calcolare il raggio di convergenza delle antitrasformate.

$$F_1(z) = \frac{e^z}{z+4}; \quad F_2(z) = \frac{e^{-z}}{z+4}; \quad F_3(z) = \frac{e^{1/z}}{z+4}; \quad F_4(z) = \frac{z^4+4z}{z+4}$$

$$F_5(z) = \frac{z+6}{z^4+4z}; \quad F_6(z) = \sin \frac{1}{z}; \quad F_7(z) = \frac{\sin z}{z}; \quad F_8(z) = \frac{z+2}{z-2}.$$

**Esercizio 1.3** Calcolare l'antitrasformata Zeta delle seguenti funzioni razionali

$$F_1(z) = \frac{z+6}{z-6}, \quad F_2(z) = \frac{z+6}{z^2+4z+4}, \quad F_3(z) = \frac{z^3+1}{z^4+1},$$

$$F_4(z) = \frac{z+6}{z^2-16}, \quad F_5(z) = \frac{z+6}{z^2-6z+5}, \quad F_6(z) = \frac{3z^2+2z+1}{2z^2+z}.$$

**Esercizio 1.4** Quale è il raggio di convergenza delle antitrasformate delle funzioni di cui all'Esercizio 1.3 ?

**Esercizio 1.5** A quale o quali delle antitrasformate di cui all'Esercizio 1.3 non è possibile applicare il Teorema del valore finale? Per ciascuna di tali trasformate si verifichi poi la proprietà del valore iniziale, i.e. calcolando  $f_0$  mediante la formula di inversione.

**Risposte Esercizio 1.2.** Sono trasformate Zeta le funzioni  $F_3, F_5, F_6, F_8$ . Non lo sono le altre.