

APPLICAZIONI di MATEMATICA

A.A. 2015-2016

ESERCIZI parte 5

November 13, 2015

1 Trasformata di Laplace

Esercizio 1.1 - Si considerino le seguenti funzioni. Quale o quali è di classe Λ^1 ? (Si assuma che tali funzioni sono nulle per $t < 0$)

$$\begin{array}{ll} f_1(t) = e^{-t^2}; & f_2(t) = t^7 + 14t^6; \\ f_3(t) = t \cos t; & f_4(t) = e^t \cos t^2; \\ f_5(t) = e^{t^2} (2 + \cos t); & f_6(t) = t^{-4}; \\ f_7(t) = t^{-1/2}. & \end{array}$$

Esercizio 1.2 - Si calcoli l'ascissa di convergenza delle seguenti funzioni di classe Λ^1 . (Si assuma che tali funzioni sono nulle per $t < 0$)

$$\begin{array}{ll} f_1(t) = e^{-7t}; & f_2(t) = t^7 e^{7t}; \\ f_3(t) = t e^{-5t}; & f_4(t) = t \sin t e^{-4t}; \\ f_5(t) = e^{5t} \cos t; & f_6(t) = t^4 \cos t. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g_1(t) = \begin{cases} 21 & \text{se } t \in [6, 15] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ; \quad g_2(t) = \begin{cases} e^t \sin t & \text{se } t \in [\pi, 4\pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ; \\ g_3(t) = \begin{cases} e^{-t} \sin t & \text{se } t \in [2\pi, 5\pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ; \quad g_4(t) = \begin{cases} e^{-6t} & \text{se } t > 6 \\ e^{6t} & \text{se } t \in (0, 6) \end{cases} . \end{array}$$

Esercizio 1.3 Quale o quali delle seguenti funzioni è di classe Λ^1 ?

$$\begin{aligned}f_1(t) &= t^{-2}u(t-2), & g_1(t) &= t^{-1/2}u(t-2) \\f_2(t) &= t^{-2}u(t), & g_2(t) &= e^{-2t}t^{-1/2}u(t) \\f_3(t) &= e^{-t}t^{-2}u(t), & g_3(t) &= e^t t^{-1/2}u(t-1).\end{aligned}$$

2 Funzioni Reali Positive

Esercizio 2.1 - Stabilire se le seguenti funzioni razionali sono RP oppure no.

$$\begin{aligned}F_1(s) &= \frac{s^4 + 10s^2 + 3}{s^3 + s}; & F_2(s) &= \frac{3s^2 + s + 18}{s^2 + 36s}; \\F_3(s) &= \frac{4s + 6}{s^2 + s}; & F_4(s) &= \frac{s^4 + s^2 + 3}{s^3 + s}; \\F_5(s) &= \frac{s^3 + 4s^2 - 4s - 1}{s^3 - s^2 + s - 1}; & F_6(s) &= \frac{3s + 5}{s^2 + 4s + 3}.\end{aligned}$$

Risposte : sono RP le funzioni F_1, F_2, F_5, F_6 . Non lo sono le altre.

Esercizio 2.2 - Usando il test delle funzioni dispari, stabilire quali delle seguenti funzioni è RP.

$$\begin{aligned}F_1(s) &= \frac{s^5 + 10s^3 + 3s}{s^4 + s^2 + 10}; & F_2(s) &= \frac{s^3 + 6s}{s^2 + 4}; \\F_3(s) &= \frac{s^3 + 6s}{s^2 + 8}; & F_4(s) &= \frac{s^6 - 1}{s^5 - s}; & F_5(s) &= \frac{s^6 + 1}{s^5 + s}.\end{aligned}$$

Risposte: lo è soltanto la funzione F_2

Esercizio 2.3 - Per le funzioni F_i , con $i \neq 2$, di cui all'Esercizio 1.2, quale o quali delle condizioni per la positività nel test delle "4 condizioni" non sono verificate?

Esercizio 1.4 - Determinare per quali valori del parametro reale λ sono RP le funzioni

$$\begin{aligned}F_1(s) &= \frac{s^4 + \lambda^2 s^2 + 3}{s^3 + s}; & F_2(s) &= \frac{s^2 - \lambda s + 6}{\lambda^2 s^2 + 4s}; \\F_3(s) &= \frac{4s + \lambda + 1}{s^2 + s}; & F_4(s) &= \frac{s^2 + 4}{s^3 + \lambda^2 s}; & F_5(s) &= \frac{s + \lambda - 1}{s^2 + s}.\end{aligned}$$

Lo svolgimento completo dell'Esercizio per le funzioni F_1, F_2, F_3 è in Cap. 2.18 del volume M. Marini "Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche", Edizioni Cedam, 1999.

Risposte:

$$F_1 : |\lambda| \geq 2;$$

$$F_2 : \lambda \in [-2/3, 0]$$

$$F_3 : \lambda \in [-1, 3]$$

$$F_4 : |\lambda| \geq 2$$

$$F_5 : \lambda \in [1, 2].$$

Esercizio 2.5 - Dopo aver verificato la positività delle seguenti funzioni, si determinino le reti RLC che hanno tali funzioni come impedenza e ammettenza.

$$F_1(s) = \frac{s^3 - 3s^2 + 4s - 12}{s^4 - 3s^3 + 9s^2 - 27s}$$

$$F_2(s) = \frac{s+1}{s+4}; F_3(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+8};$$

$$F_4(s) = 6s + 8 + \frac{15}{s+5}; F_5(s) = \frac{s^3+4s}{s^2+2}.$$

(Suggerimento: numeratore e denominatore di F_1 si annullano in $s = 3$)

Esercizio 2.6 - Usando il criterio di Talbot, stabilire se le seguenti funzioni razionali sono RP oppure no.

$$F_1(s) = \frac{36s^3 + 48s^2 + 21s + 3}{36s^3 + 42s^2 + 16s + 2};$$

$$F_2(s) = \frac{6s^3 + s^2 + 4s + 1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 1};$$

$$F_3(s) = \frac{2s^3 + 2s^2 + 4s + 1}{s^3 + s^2 + 2s + 1};$$

$$F_4(s) = \frac{s^4 + s^2 + 3}{s^3 + s};$$

$$F_5(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 4s + 1}{2s^3 + s^2 + 4s + 1}.$$

Risposte : sono RP le funzioni F_1, F_3, F_5 . Non lo sono le altre.

Esercizio 2.7 - Quale o quali dei seguenti polinomi è un polinomio di Hurwitz?

$$P_1(s) = 7s^3 + 5s^2 + 6s + 4$$

$$P_2(s) = 8s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 5s + 3$$

$$P_3(s) = 6s^3 + 3s + 4$$

$$P_4(s) = s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 4s + 5$$

$$P_5(s) = 5s^4 + 4s^2 + 8s^2 + 2s + 1$$

$$P_6(s) = 7s^3 + 5s^2 + 2s + 8.$$

Risposte lo sono i polinomi P_1, P_4, P_5 ; non lo sono gli altri.