

ANALISI MATEMATICA 3

A.A. 2014-2015 ESERCIZI parte seconda

March 18, 2015

1 Trasformata Laplace

Esercizio 1.1 Utilizzando la formula di Bromwich-Mellin e la teoria dei residui, calcolare le antitrasformate di Laplace delle seguenti funzioni razionali:

$$\begin{aligned}F_1(s) &= \frac{1}{s^2 + 4s + 5}; \quad F_2(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}; \\F_3(s) &= \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s}; \quad F_4(s) = \frac{s + 2}{(s + 1)(s - 2)(s^2 + 4)}; \\F_5(s) &= \frac{1}{(s - 1)^2(s + 2)}; \quad F_6(s) = \frac{s^2 + 2s - 1}{s^3 - 2s^2 + 2s - 1}.\end{aligned}$$

Esercizio 1.2 Quale o quali delle seguenti funzioni è la trasformata di Laplace di una distribuzione?

$$\begin{aligned}G_1(s) &= \frac{s^2 + 4}{s^2 - 4}; \quad G_2(s) = \frac{s^2 + 4}{s^2 - 4s}; \quad G_3(s) = \frac{s + 4}{s^2 - 4}; \\G_4(s) &= \frac{s^2 + 4}{s^3 - 4}; \quad G_5(s) = \frac{s^3 + 4s}{s^2 - 4}; \quad G_6(s) = \frac{s^4 + 4}{s^2 - 4s}; \\G_7(s) &= \frac{s}{s^4 - 4}; \quad G_8(s) = \frac{4}{s^2 - 4}; \quad G_9(s) = \frac{s^4 + 4s^2}{s^3 - 4}.\end{aligned}$$

Esercizio 1.3 - Si considerino le seguenti funzioni. Quale o quali ammette trasformata di Laplace in senso classico? (Si assuma che tali funzioni sono

nulle per $t < 0$). In caso affermativo, si determini l'ascissa di convergenza α_f .

$$\begin{array}{ll} f_1(t) = e^{-t^2}; & f_2(t) = t^7 + 14t^6; \\ f_3(t) = t \cos t; & f_4(t) = e^t \cos t^2; \\ f_5(t) = e^{t^2} \cos t; & f_6(t) = t^{-4}. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g_1(t) = \begin{cases} 21 & \text{se } t > 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ; \\ g_2(t) = \begin{cases} e^t \sin t & \text{se } t > 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ; \\ g_3(t) = \begin{cases} t^{-4} & \text{se } t > 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} . \end{array}$$

Soluzioni Esercizio 1.1 Per $t > 0$ si ha:

$$\begin{array}{l} f_1(t) = e^{-2t} \sin t \\ f_2(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t}) \\ f_3(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} \\ f_4(t) = \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{10} \cos 2t - \frac{1}{5} \sin 2t \\ f_5(t) = \frac{1}{9}(e^{-2t} - e^t + 3te^t) \\ f_6(t) = 2e^t + e^{t/2} \left(\frac{5\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t - \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) . \end{array}$$

(Tali funzioni sono inoltre nulle per $t < 0$).