

**ANALISI MATEMATICA 3**  
**A.A. 2014-2015**  
**ESERCIZI parte 3 e fac-simile compito**

April 1, 2015

## 1 Equazioni differenziali lineari

**Esercizio 1.1** Usando la trasformata di Laplace, determinare la soluzione dei seguenti problemi ai dati iniziali (per  $t > 0$ )

|                                                         |                                                        |
|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| a) $y'' + 7y' + 12y = 0$<br>$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$ | b) $y'' - 8y' - 9y = 0$<br>$y(0) = 4, \quad y'(0) = 1$ |
|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|

|                                                                       |                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| c) $y'' + 6y' + 8y = 0$<br>$y(0) + y'(0) = 0, \quad y(0) - y'(0) = 1$ | d) $y'' + 5y' = 0$<br>$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$ |
|-----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|

**Esercizio 1.2** Stabilire quale delle seguenti equazioni è oscillante e quale nonoscillante.

- 1)  $y'' - 7y' + (x^2 - 1)e^{7x}y = 0$
- 2)  $y'' + 7xy' + (1 - x^2)y = 0$
- 3)  $y'' + \frac{1}{x}y' + 4y = 0$
- 4)  $y'' + 5xy' - 4xy = 0$
- 5)  $y'' + \frac{3-x}{x+3}y = 0$
- 6)  $y'' + \frac{x^3-3x-1}{x(x^2+9)}y = 0$

Risposta: sono oscillanti le equazioni 1), 3) e 6); nonoscillanti le altre.

**Esercizio 1.3** Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad (1)$$

dove le funzioni  $a$  e  $b$  sono continue in  $[0, \infty)$ .

- 1) La funzione  $tg x$  può essere soluzione di (1)?
- 2) Le funzioni  $y_1(x) = 75x - 1$ ,  $y_2(x) = x \sin x$  possono essere contemporaneamente soluzioni di (1)?

**Esercizio 1.4** Stabilire quale delle seguenti equazioni è oscillante e quale nonoscillante

- 1)  $y'' + 4xy' + e^{-4x^2}y = 0$
- 2)  $y'' + (3 - \sin x)y = 0$
- 3)  $y'' - 2y' + 6e^{4x}y = 0$

Risposta: sono oscillanti le equazioni 2) e 3); nonoscillanti la 1).

**Esercizio 1.5** Studiare, al variare del parametro reale  $\lambda$ , l'oscillazione dell'equazione

$$y'' + 5\lambda e^x y = 0.$$

**Esercizio 1.6** Esiste un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine del tipo

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

con  $a$  e  $b$  funzioni continue per ogni  $x$  reale avente per soluzione  $y(x) = (x - 15)^2$  ?

|          |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| Risposte |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |
| Domande  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |

Scrivere il numero della risposta sopra alla corrispondente domanda

• *Domanda 1* Sia  $f(t) = 2/(3 + 2t^2)$  e sia  $F$  la sua trasf. di Fourier. Allora

- 1)  $F(-1) = j\sqrt{2/3}e^{-\sqrt{3}/\sqrt{2}}$
- 2)  $F(-1) = \pi\sqrt{2/3}e^{\sqrt{3}/\sqrt{2}}$
- 3)  $F(-1) = \pi\sqrt{2/3}e^{-\sqrt{3}/\sqrt{2}}$
- 4)  $F(-1) = \pi j\sqrt{2/3}e^{\sqrt{3}/\sqrt{2}}$

• *Domanda 2* Siano  $g$  e  $tg(t-1) \in L^1(R)$ . Sia  $G$  la trasf. di Fourier di  $g$ . Allora la trasf. di Fourier di  $tg(t-1)$  è:

- 1)  $jG'(\omega)e^{-j\omega} + G(\omega)e^{-j\omega}$
- 2)  $jG(\omega)e^{-j\omega}$
- 3)  $jG'(\omega)e^{-j\omega}$
- 4)  $G'(\omega)e^{-j\omega} + jG(\omega)e^{-j\omega}$

• *Domanda 3* Calcolare per  $t > 0$  l'antitrasf. di Laplace di

$$\frac{5s}{s^2 + 7s + 6}$$

- 1)  $6e^{6t}$
- 2)  $-e^{-t}$
- 3)  $e^{-t} + 6e^t$
- 4)  $-e^{-t} + 6e^{-6t}$

• *Domanda 4* Quale o quali delle seguenti equazioni è oscillante?

$$\begin{aligned} A) \quad y'' + 5y' &= 0; \quad B) y'' + 7y = 0 \\ C) y'' - 5y' &= 0; \quad D) y'' - 5y = 0 \end{aligned}$$

- 1) nessuna delle altre risposte è corretta.
- 2)  $B)$
- 3)  $A)$  e  $B)$
- 4)  $B)$  e  $C)$

• *Domanda 5* Sia  $G$  la trasform. di Fourier di  $tf(t)$ , dove  $f$  è definita nella domanda contrassegnata con (\*). Allora

- 1)  $G \in L^2(R)$
- 2)  $G$  non è derivabile in  $R$
- 3)  $G$  non è continua in  $R$
- 4)  $G$  è dispari

• *Domanda 6* Calcolare per  $t < 0$  l'antitrasf. di Fourier di

$$F(\omega) = \frac{3\omega}{(\omega^2 + 4)(\omega + j)}$$

- 1)  $-e^t + (3/2)e^{2t}$
- 2)  $-e^{-t} - (3/2)e^{2t}$
- 3)  $e^t - (3/2)e^{-2t}$
- 4)  $e^{-t} - (3/2)e^{-2t}$

• *Domanda 7* Quale tra le seguenti funzioni ha trasf. di Fourier di classe  $C^2(R)$ ?

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{3}{(t^2 - 3jt - 2)}, \quad f_2(t) = \frac{3}{(t - j)^2(t + 2j)}, \\ f_3(t) &= \frac{3}{(t + j)^2(t + 2j)^2} \end{aligned}$$

- 1) nessuna
- 2)  $f_2$  e  $f_3$
- 3)  $f_1$
- 4)  $f_3$

• *Domanda 8* (\*) Sia

$$f(t) = \frac{\sin t}{t^4 + 4t^2 + 6}$$

e sia  $F$  la sua trasf. di Fourier. Allora

- 1)  $F(0+) \neq F(0-)$
- 2)  $F(0) = 0$
- 3)  $F(0) + F(+\infty) = +\infty$
- 4)  $F(0) + F(+\infty) = 1$

• *Domanda 9* La funzione  $f(x) = x \sin x$  può essere soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

con  $a$  e  $b$  funzioni continue in  $[0, +\infty)$ ?

- 1) No, perché  $f$  è persistente.
- 2) Sì, scegliendo  $a$  e  $b$  in modo opportuno
- 3) No, perché ha uno zero doppio in  $x = 0$ .
- 4) No, perché  $f$  è oscillante.

# SOLUZIONE

|          |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Risposte | 3 | 1 | 4 | 2 | 1 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| Domande  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |