ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2015-2016
Traccia della lezione del 23 marzo 2016

March 23, 2016

1 Proprietà della trasformata di Laplace

Ricordiamo le principali proprietà della trasformata di Laplace, che intervengono nella risolubilità di equazioni differenziali e integro-differenziali a coefficienti costanti. Per maggiori chiarimenti e dettagli si veda anche Cap. 1.9., e 1.10, del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

- **Linearità**

  Siano $f_1, f_2 \in \Lambda^1$ e siano c_1, c_2 due costanti (reali o complesse). Allora:

  $$L[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 L[f_1] + c_2 L[f_2].$$

- **Derivazione**

  Sia $f \in C^1[0,\infty)$ e sia $f, f' \in \Lambda^1$. Allora $f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t)$ esiste finito e

  $$L[f\,'] = sL[f] - f(0+). \tag{1}$$

- Sia $f \in C^2[0,\infty)$ e sia $f, f', f\,'' \in \Lambda^1$. Allora $f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t)$ e $f\,'(0+) = \lim_{t\to 0+} f\,'(t)$ esistono finiti e

  $$L[f\,''] = s^2 L[f] - s\ f(0+) - f\,'(0+).$$

- Sia $f \in C^N[0,\infty)$ e sia $f, f', .., f^{(N)} \in \Lambda^1$. Allora $f^{(i)}(0+) = \lim_{t\to 0+} f^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, ...N$ esistono finiti e

$$L[f^{\,(N)}] = s^N L[f] - \Big(s^{N-1}\ f(0+) + s^{N-2} f^{\,\prime}(0+) + ...f^{\,(N-1)}(0+)\Big)\,.$$

- **Integrazione**

  Sia $f \in \Lambda^1$ e sia $g(t) = \int_0^t f(r)dr \in \Lambda^1$. Allora:

$$L\left[g(t)\right] = \frac{L[f]}{s}.$$

- **Convoluzione**

  Sia $f, g \in \Lambda^1$. Poiché f e g sono nulle per $t < 0$, il prodotto di convoluzione $f * g$ assume la forma

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$$

  e si ha

$$L[f * g] = L[f]\ L[g].$$

  In altre parole, sia $f, g \in \Lambda^1$; posto $L[f] = F(s)$, $L[g] = G(s)$ si ha

$$f * g = L^{-1}(F(s)\ G(s)),$$

  dove il simbolo L^{-1} indica l'antitrasformata di Laplace.

In generale, l'ipotesi di esistenza e continuità della derivata di f in $[0,\infty)$ nella proprietà della derivazione non può essere tralasciata, come illustra, ad esempio la funzione

$$g(t) = u(t) - u(t-1).$$

Infatti, con facili calcoli si ottiene

$$L[g'] = 0, \quad L[g] = \frac{1-e^{-s}}{s},$$

e quindi (1) non è verificata.

2 Equazioni differenziali lineari e trasformata di Laplace

Si consideri la seguente equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$y'' + ay' + by = g(t) \tag{2}$$

dove $g \in \Lambda^1$. Vogliamo trovare la soluzione y di (2) che verifica le condizioni iniziali

$$y(0) = A, y'(0) = B.$$

Essendo $g \in \Lambda^1$, è possibile provare che tutte le soluzioni di (2) sono (per $t \geq 0$) funzioni di classe Λ^1. Quindi, per la risoluzione di (2) possiamo utilizzare il metodo della trasformata di Laplace. Usando la linearità si ottiene

$$L[y''] + aL[y'] + bL[y] = L[g],$$

da cui, per il Teorema di derivazione, si ha

$$s^2 L[y] - As - B + a(sL[y] - A) + bL[y] = L[g]$$

ossia

$$L[y] = \underbrace{\frac{As + B + aA}{s^2 + as + b}}_{(\#)} + \underbrace{\frac{1}{s^2 + as + b}}_{(*)} L[g]$$

Le funzioni (#) e (*) sono funzioni razionali proprie ed allora è possibile calcolare la loro antitrasformata utilizzando il Teorema visto in precedenza. Indicate con f e h tali antitrasformate, ossia

$$f(t) = L^{-1}\left(\frac{As + B + aA}{s^2 + as + b}\right)$$
$$h(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + as + b}\right),$$

applicando la proprietà di convoluzione si ottiene per $t \geq 0$

$$y(t) = f(t) + (h * g)(t).$$

Per maggiori chiarimenti e dettagli si veda anche Cap. 1.14, 1.15 e 1.16 del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.