

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2015-2016

Traccia delle lezioni del 9 e 11 marzo 2016

March 11, 2016

1 Derivazione

Teorema (Derivazione) Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$\mathfrak{F}\{f'\} = j\omega \mathfrak{F}\{f\}.$$

Tale risultato può essere provato integrando per parti l'integrale

$$\mathfrak{F}\{f'\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-j\omega t} dt$$

e usando la proprietà:

$$f \in L^1(\mathbb{R}), f' \in L^1(\mathbb{R}) \implies \lim_{|t| \rightarrow +\infty} f(t) = 0.$$

Iterando tale risultato, si ha facilmente il seguente:

Corollario Sia $f \in C^N(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$, $f^{(N)} \in L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$\mathfrak{F}\{f^{(N)}\} = (j\omega)^N \mathfrak{F}\{f\}.$$

In particolare, se $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$, $f'' \in L^1(\mathbb{R})$, allora

$$\mathfrak{F}\{f''\} = -\omega^2 \mathfrak{F}\{f\}.$$

Si osservi che l'ipotesi " $f \in C^1(\mathbb{R})$ " nel precedente Teorema non può essere tralasciata, come mette in luce l'esempio dell'impulso rettangolare.

2 Conseguenze della proprietà di derivazione

Ricordiamo la formula dell'antitrasformata:

Teorema Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e sia inoltre f sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso $[-L, L]$. Ciò premesso si ha

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1)$$

Se $F \in L^1(\mathbb{R})$, allora l'integrale in (1) converge non solo nel senso del valore principale, ma anche in senso generalizzato (o improprio). In altre parole, se $F \in L^1(\mathbb{R})$ la formula dell'antitrasformata diviene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ può accadere che la sua trasformata $F = \mathfrak{F}\{f\}$ non appartenga a $L^1(\mathbb{R})$, come illustra, ad esempio, il caso dell'impulso rettangolare. Pertanto, come si dice, lo spazio L^1 non è chiuso rispetto all'operatore "trasformata di Fourier".

Condizioni sufficienti affinché la trasformata appartenga a $L^1(\mathbb{R})$ si ottengono come immediata conseguenza del teorema della derivazione. Si hanno infatti i seguenti:

Corollario Sia $f \in C^n(\mathbb{R})$, $f, f', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ allora $F = o(\omega^{-n})$ per $|\omega| \rightarrow \infty$, ossia

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{F(\omega)}{|\omega|^{-n}} = 0$$

dove $F = \mathfrak{F}\{f\}$.

Pertanto, sotto le ipotesi di tale Corollario, la trasformata di Fourier $F(\omega)$ tende a zero (per $\omega \rightarrow \pm\infty$) più velocemente di $|\omega|^{-n}$. In altri termini, "la trasformata di Fourier F di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ tende a zero (per $|\omega| \rightarrow +\infty$) tanto più velocemente, quanto più f è "liscia" (e con derivate in $L^1(\mathbb{R})$)"

Corollario Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$; allora $F \in L^1(\mathbb{R})$ (e quindi nella formula della antitrasformata si può omettere la sigla v.p., in quanto, in tal caso, (1) e (2) coincidono).

3 La funzione integrale e la convoluzione per la trasf. di Fourier

Teorema (Integrazione) Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dove $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, si ha

$$\mathfrak{F}\{g\} = \frac{F(\omega)}{j\omega}.$$

Poiché la trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$ è una funzione continua per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, dalla proprietà precedente si ha il

Corollario Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dove $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, si ha

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F(\omega) = 0.$$

La Convoluzione

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Si chiama *prodotto di convoluzione* di f e g , e si indica con $f * g$, la funzione

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (3)$$

Tale definizione è lecita, nel senso che è possibile provare che

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}) \implies f * g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Il prodotto di convoluzione gode delle proprietà:

$$\begin{array}{ll} \text{commutativa} & : f_1 * f_2 = f_2 * f_1 \\ \text{associativa} & : (f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3) \\ \text{distributiva} & : (f_1 + f_2) * f_3 = (f_1 * f_3) + (f_2 * f_3) \end{array}$$

Tali proprietà, caratteristiche dell'usuale prodotto, giustificano il nome di prodotto di convoluzione dato a (3). Vale il seguente:

Teorema Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, $G(\omega) = \mathfrak{F}\{g\}$, si ha

$$\mathfrak{F}\{f * g\} = F(\omega)G(\omega).$$

In altre parole, l'antitrasformata di Fourier della funzione $H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$ è la convoluzione $f * g$

4 La traslazione

Traslazione in frequenza - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora, indicata con F la trasformata di Fourier di f si ha

$$f(t)e^{j\gamma t} \in L^1(\mathbb{R})$$

e

$$\mathfrak{F}\{f(t)e^{j\gamma t}\} = F(\omega - \gamma), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Traslazione temporale - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora, indicata con F la trasformata di Fourier di f si ha

$$f(t - A) \in L^1(\mathbb{R})$$

e

$$\mathfrak{F}\{f(t - A)\} = e^{-jA\omega} F(\omega), \quad A \in \mathbb{R}.$$

5 Il Teorema di Plancherel e la trasformata in L^2

Vale il seguente:

Teorema di Plancherel - Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$, Allora:

1) L 'integrabile (nel senso del valore principale)

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

esiste per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, eccetto, al più, un insieme di misura nulla.

Posto allora

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt,$$

si ha inoltre:

2) $F \in L^2(\mathbb{R})$

3) Vale la formula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

4) Vale l'identità:

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

COMMENTI : la proprietà 4) è detta anche **principio di conservazione della norma (o dell'energia)**.

La proprietà 1) suggerisce la seguente definizione.

DEFINIZIONE - Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$; si chiama *Trasformata di Fourier in L^2* , la funzione F definita da

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4)$$

OSSERVAZIONE : se inoltre $f \in L^1(\mathbb{R})$, ossia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, allora l'integrale in (4) coincide con l'integrale improprio, ossia la trasformata di Fourier in L^2 **coincide** con la trasformata di Fourier in L^1 , vista in precedenza. La definizione precedente è pertanto un'estensione del concetto di trasformata di Fourier e, ovviamente, assume rilevanza per quelle funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R})$ e non a $L^1(\mathbb{R})$, ossia per quelle funzioni per le quali la trasformata in $L^1(\mathbb{R})$ non è definita.

Ciò posto, la proprietà 3) del teorema di Plancherel diviene la formula dell'antitrasformata, formula che, a differenza di quanto accade in L^1 , vale sotto le **stesse** ipotesi che assicurano l'esistenza della trasformata.

6 Proprietà di simmetria

Dal teorema di Plancherel segue l'importante proprietà della trasformata in L^2 :

Teorema (Proprietà di simmetria) Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ e sia $\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega)$ la sua trasformata. Allora $F \in L^2(\mathbb{R})$ e

$$\mathfrak{F}\{\mathfrak{F}\{f\}\} = 2\pi f(-\omega).$$

In particolare, se f è inoltre pari, allora la trasformata della trasformata di Fourier di f coincide con f , a meno di un fattore 2π .

Conseguenze:

◆ Poiché la trasformata dell'impulso rettangolare

$$f(t) = \begin{cases} M & \text{se } |t| \leq L \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

è la funzione

$$F(\omega) = 2ML \operatorname{sinc}(\omega L),$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$g(t) = 2ML \operatorname{sinc}(Lt)$$

è

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = G(\omega) = \begin{cases} 2\pi M & \text{se } |\omega| \leq L \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Si osservi che tale trasformata non è continua in $\mathbb{R}$. Infatti $g \notin L^1(\mathbb{R})$!

◆ Poiché la trasformata dell'impulso esponenziale

$$h(t) = \exp(-|t|);$$

è la funzione

$$H(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2},$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$\varphi(t) = \frac{2}{1 + t^2}$$

è

$$\mathfrak{F}\{\varphi(t)\} = \Phi(\omega) = 2\pi \exp(-|\omega|).$$

Si osservi che tale trasformata non è derivabile in $\omega = 0$ (ed infatti $t\varphi(t) \notin L^1(\mathbb{R})$).

7 Altre proprietà della trasformata di Fourier

Sia $f \in L^2(\mathbb{R}) \cup L^1(\mathbb{R})$ e, nel caso $f \in L^1(\mathbb{R})$ si supponga anche che f è sviluppabile in serie di Fourier in $[-L, L]$ per ogni $L > 0$. Sia poi F la trasformata di Fourier di f . Allora valgono le seguenti proprietà:

1. Se f è pari, allora F è pari e viceversa.
2. Se f è dispari, allora F è dispari e viceversa
3. Se f è reale e pari, allora F è reale e pari e viceversa.
4. Se f è reale, allora $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$.
5. Se F è reale e pari, allora f è reale e pari.

8 La traslazione in L^2

Le proprietà della traslazione temporale e in frequenza viste prima continuano a valere anche quando $f \in L^2(\mathbb{R})$. Precisamente, se $f \in L^2(\mathbb{R})$, allora ($\gamma \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}$)

$$f(t)e^{j\gamma t} \in L^2(\mathbb{R}), \quad f(t - A) \in L^2(\mathbb{R})$$

e

$$\mathfrak{F}\{f(t)e^{j\gamma t}\} = F(\omega - \gamma), \quad \mathfrak{F}\{f(t - A)\} = e^{-jA\omega}F(\omega).$$

9 Il teorema di Shannon

Si veda Cap. 3.14 del testo M. Marini "Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche", Edizioni Cedam, 1999.

10 Il caso razionale

I seguenti risultati permettono di stabilire quando una funzione **razionale** f è trasformabile in L^2 secondo Fourier e, analogamente quando una funzione **razionale** F è una trasformata di Fourier in L^2 .

Teorema 1 Sia R una funzione razionale, ossia

$$R(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

con N, D polinomi primi tra loro. Allora :

1) $R \in L^2(\mathbb{R})$ se e solo se R è propria e il polinomio D non ha zeri reali, ossia se e solo se

$$i) \operatorname{gr} D - \operatorname{gr} N > 0 \quad (5)$$

$$ii) D(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2) $R \in L^1(\mathbb{R})$ se e solo se

$$i) \operatorname{gr} D - \operatorname{gr} N > 1$$

$$ii) D(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dal teorema precedente si ha subito il seguente:

Corollario *Sia R una funzione razionale, ossia*

$$R(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

con N, D polinomi primi tra loro. Allora :

$$R \in L^1(\mathbb{R}) \implies R \in L^2(\mathbb{R}).$$

Il viceversa di tale Corollario può essere falso, come illustra, ad esempio, la funzione

$$R(x) = \frac{4x + 3}{x^2 + 9}.$$

Infatti un facile calcolo mostra che $R \in L^2(\mathbb{R})$ e $R \notin L^1(\mathbb{R})$.

Per quanto riguarda poi la trasformata di Fourier, valgono i seguenti risultati:

Teorema 2 *Sia f una funzione razionale,*

$$f(t) = \frac{N(t)}{D(t)}$$

con N e D polinomi, primi tra loro e $D(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora f è sempre una trasformata di Fourier. Precisamente:

- (1) se $\text{gr } D - \text{gr } N \geq 2$, allora f ammette trasformata di Fourier sia in $L^2(\mathbb{R})$ che in $L^1(\mathbb{R})$.
 (2) se $\text{gr } D - \text{gr } N = 1$, allora f ammette trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$.
 (3) se $\text{gr } D - \text{gr } N \leq 0$, allora f ammette trasformata di Fourier nello spazio delle distribuzioni.

Teorema 3 Sia F una funzione razionale,

$$F(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$$

con N e D polinomi, primi tra loro e $D(\omega) \neq 0$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$. Allora F è sempre una trasformata di Fourier. Precisamente:

- (1) se $\text{gr } D - \text{gr } N > 0$, allora F è trasformata di Fourier di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$
 (2) se $\text{gr } D - \text{gr } N \leq 0$, allora F è trasformata di Fourier di una distribuzione.

Si osservi che nel Teorema 3-(1) la proprietà " $f \in L^2(\mathbb{R})$ " discende dal Teorema di Plancherel, visto in precedenza, mentre la proprietà $f \in L^1(\mathbb{R})$ sarà una (ovvia) conseguenza del calcolo della antitrasformata. Inoltre i punti (3) del Teorema 2 e (2) del Teorema 3 al momento sono una "anticipazione" e saranno visti alla fine del corso, nell'ambito delle proprietà delle distribuzioni temperate.

ESEMPIO 1

Si considerino le funzioni

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{5+t}{t-9}; & f_2(t) &= \frac{5+t}{t^2+9}; \\ f_3(t) &= \frac{5+t}{t^2-9}; & f_4(t) &= \frac{5+t}{(t^2+9)^2}. \end{aligned}$$

Allora f_1 e f_3 non sono trasformabili secondo Fourier (né in L^1 né in L^2), in quanto il denominatore ha zeri reali e quindi f_1 e f_3 non appartengono né a L^1 né a L^2 . Invece $f_2 \in L^2$ e f_4 appartiene sia in L^2 che in L^1 . Pertanto f_2 ammette trasformata di Fourier in L^2 e f_4 ammette trasf. di Fourier sia in L^1 che in L^2 e, ovviamente, le due trasformate coincidono

ESEMPIO 2

Si considerino le funzioni

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \frac{5\omega}{\omega - 8}; & F_2(\omega) &= \frac{5\omega}{\omega^2 + 3\omega}; \\ F_3(t) &= \frac{5\omega}{\omega^2 + 3}; & F_4(\omega) &= \frac{5\omega^2 + 4}{\omega^2 + 8}. \end{aligned}$$

Allora F_1 e F_2 non appartengono a L^2 (il denominatore ha zeri reali) e quindi non sono trasformate di Fourier. Invece $F_3 \in L^2$ e quindi (vedi Teorema 2) la sua antitrasformata appartiene a $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Infine F_4 è trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni (vedi Teorema 3).