

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2015-2016

Traccia della lezione del 6 aprile 2016

April 6, 2016

1 Equazioni differenziali lineari del 2 ordine: proprietà generali

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x) \quad (1)$$

dove le funzioni a, b, g sono continue a tratti in un intervallo I dell'asse reale del tipo $(\bar{x}, x_1)$ oppure $[\bar{x}, x_1)$. Non è escluso il caso in cui I coincida con $\mathbb{R}$.

Se g è la funzione identicamente nulla, allora (1) diviene

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (2)$$

e prende nome di equazione omogenea. Se g non è la funzione identicamente nulla, allora (1) si dice nonomogenea o affine.

Valgono le seguenti proprietà:

1. Per ogni $x_0 \in I$ e per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione $y = y(x)$ di (1) tale che $y(x_0) = c_1, y'(x_0) = c_2$.
2. Ogni soluzione di (1) è **persistente**, ossia è definita in **tutto** l'intervallo I .

3. *Nel caso omogeneo, l'insieme delle soluzioni di (2) è uno spazio lineare di dimensione 2. Nel caso non omogeneo, ogni soluzione y di (1) si ottiene sommando una generica soluzione y_0 dell'equazione omogenea associata (2) con una soluzione particolare $\bar{y}$ dell'equazione (1). In altri termini si ha*

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t).$$

Si osservi che la funzione identicamente nulla è soluzione se e solo se $g \equiv 0$, ossia nel caso omogeneo.

Nelle proprietà precedenti gioca un ruolo essenziale la "linearità dell'equazione considerata. A lezione sono stati visti esempi di equazioni non lineari (sempre del secondo ordine) in cui la validità delle proprietà 1. e 2. viene meno.

Se le funzioni a e b sono costanti, allora (1) si chiama "a coefficienti costanti". La sua risolubilità è stata trattata nei corsi di Analisi e può essere affrontata, come si è visto in precedenza, anche utilizzando la trasformata di Laplace. Esistono tuttavia nelle applicazioni vari casi in cui il modello matematico è rappresentato da un'equazione tipo (1) o (2) con a e/o b non a coefficienti costanti. Un primo esempio è l'**equazione di Schrödinger monodimensionale**

$$w'' + \frac{2m}{H^2}(E - V(x))w = 0 \quad (3)$$

dove :

m rappresenta la massa dell'elettrone;

H è la costante di Planck normalizzata (i.e. $H = h/(2\pi)$, h = costante di Planck);

E è l'energia dell'elettrone;

V è il potenziale applicato;

w è una funzione legata alla funzione d'onda ($|w(x)|^2$ rappresenta la probabilità che l'elettrone occupi effettivamente la posizione x).

L'equazione (3) è di tipo (2) con

$$a(x) = 0, \quad b(x) = \frac{2m}{H^2}(E - V(x)).$$

Un altro esempio è l'**equazione di Bessel**, ossia l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \quad x \in (0, +\infty) \quad (4)$$

dove n è un parametro reale. Tale equazione interviene nello studio di problemi di diffusione in corpi con geometria cilindrica. Ad esempio interviene nella propagazione del calore in tubi, nella diffusione di vibrazioni in strutture cilindriche, nella vibrazione di segnali (modulazione).

2 L'oscillazione

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (5)$$

dove le funzioni a, b sono continue a tratti in un intervallo I dell'asse reale del tipo $(x_0, +\infty)$ oppure $[x_0, \infty)$. Non è escluso il caso in cui I coincida con $\mathbb{R}$, ossia che $x_0 = -\infty$. Ricordiamo la seguente definizione:

Definizione - Sia y una soluzione di (5), diversa dalla soluzione nulla; y si dice *oscillante* se esiste una successione $\{x_n\}$, con $x_n \rightarrow +\infty$, tale che $y(x_n) = 0$, ossia se y ha infiniti zeri che si "accumulano all'infinito". In caso contrario y si dice *nonoscillante*.

Poiché per (5) vale la proprietà dell'unicità della soluzione rispetto ai dati iniziali, il grafico di una soluzione oscillante di (5) "taglia" l'asse x infinite volte (per $x \rightarrow +\infty$). Ricordiamo poi il seguente:

Teorema (di Sturm) - *Tutte le soluzioni non banali di (5) hanno lo stesso carattere rispetto all'oscillazione, ossia o tutte oscillano o tutte nonoscillano.*

In virtù di tale risultato allora non possono coesistere per una stessa equazione (5) soluzioni oscillanti e nonoscillanti; pertanto (5) si dice *oscillante* o *nonoscillante* a seconda che tutte le sue soluzioni (diverse dalla soluzione nulla) siano oscillanti o nonoscillanti.

Un criterio di oscillazione è il seguente:

Teorema di Leighton

I) Sia $b(x) > 0$ per ogni x grande, i.e. $x \geq \bar{x} \geq x_0$, e sia A una primitiva di a , ossia

$$A'(x) = a(x).$$

(i) L'equazione (5) è oscillante se

$$\int_{\bar{x}}^{\infty} e^{-A(x)} dx = \int_{\bar{x}}^{\infty} e^{A(x)} b(x) dx = +\infty.$$

(ii) L'equazione (5) è nonoscillante se

$$\int_{\bar{x}}^{\infty} e^{-A(x)} dx < +\infty, \quad \int_{\bar{x}}^{\infty} e^{A(x)} b(x) dx < +\infty.$$

II) Sia $b(x) \leq 0$ per ogni $x \geq \bar{x} \geq x_0$. Allora l'equazione (5) è nonoscillante.

- ESEMPI

Applicando il Teorema di Leighton si ottiene facilmente che l'equazione

$$y'' + \frac{1}{x}y = 0. \tag{6}$$

è oscillante. Così pure è oscillante l'equazione

$$y'' + \frac{2x^2 + 1}{4x^2 + 4}y = 0.$$

Invece è nonoscillante l'equazione

$$y'' + \frac{1 - 2x^2}{4x^2 + 4}y = 0.$$

- Si consideri l'**equazione di Bessel**, (4) sopra introdotta. Tale equazione interviene nello studio di problemi di diffusione in corpi con geometria cilindrica. Ad esempio interviene nella propagazione del calore in tubi, nella diffusione di vibrazioni in strutture cilindriche, nella vibrazione di segnali (modulazione). Utilizzando il criterio di Leighton è facile mostrare che tale equazione è oscillante, ossia che tutte le sue soluzioni hanno infiniti zeri reali positivi (che si accumulano a $+\infty$).

- Esercizio

Cosideriamo l'equazione (5), ossia il caso omogeneo. Sia u una soluzione di (5) non nulla in $[x_1, x_2]$. Allora la funzione

$$v(x) = u(x) \int_{x_1}^x \frac{1}{e^{A(r)} u^2(r)} dr$$

è un'altra soluzione di (5), linearmente indipendente da u (), dove A è una primitiva di a , ossia $A'(x) = a(x)$. Conseguentemente, per la risolubilità nel caso omogeneo è sufficiente conoscere una sola soluzione.*

(*) Ricordiamo che le due soluzioni u, v di (5) sono linearmente indipendenti se e solo se il loro wronskiano è diverso da zero, ossia se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{pmatrix} \neq 0.$$

- Esercizio - Le due funzioni

$$\begin{aligned} u(x) &= x^4 + 3x + 1 \\ v(x) &= \sin(x^2 + 1) \end{aligned}$$

possono essere soluzioni della stessa equazione (5) con a e b funzioni continue in $[1, \infty)$?