ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2015-2016
Traccia delle lezioni del 20 e 22 aprile 2016

May 19, 2016

1 L'equazione di Bessel (n intero positivo)

Come detto in una precedente lezione, si chiama **equazione di Bessel** l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \qquad x \in (0, +\infty) \tag{B}$$

dove n è un parametro reale.

Nel caso particolare in cui n sia un intero nonnegativo, si può dimostrare che tra le soluzioni di (B) vi sono le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \tag{1}$$

Le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie* e godono delle seguenti proprietà:

1. se n è pari, allora J_n è una serie di polinomi pari;
2. se n è dispari, allora J_n è una serie di polinomi dispari;
3. $J_0(0+) = 1$; $J_n(0+) = 0$ per n intero , $n \geq 1$.
4. Le funzioni J_n sono funzioni oscillanti, ossia hanno infiniti zeri reali positivi che si accumulano a $+\infty$. Inoltre per $x \to +\infty$ sono funzioni "smorzate", i.e. $\lim_{x\to+\infty} J_n(x) = 0$.

2 La funzione Gamma Euleriana

Si chiama *Gamma Euleriana* la funzione

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Tale integrale converge per ogni valore positivo del parametro reale x e quindi la funzione Gamma Euleriana è definita in $(0, \infty)$. Essa gode delle seguenti proprietà (di immediata verifica):

1. $\Gamma(1) = 1$;
2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (e quindi $\Gamma(2) = 1$);
3. $\Gamma(x+2) = x(x+1)\Gamma(x)$;
4. $\Gamma(x+3) = x(x+1)(x+2)\Gamma(x)$;

   ....
5. $\Gamma(x+n) = x(x+1).....(x+n-1)\Gamma(x)$;

Ponendo in quest'ultima uguaglianza $x = 1$, si ottiene l'importante proprietà

$$\Gamma(n+1) = n!$$

ossia **la funzione Gamma Euleriana è l'estensione al caso continuo del concetto di fattoriale.**

Come conseguenza delle relazioni 1) ,...5) si ha che la funzione Γ è nota, quando siano noti i valori che Γ assume in $(0, 1]$. Infatti se Γ è nota in $(0, 1]$, usando 2) si ottiene che Γ è nota anche in $(1, 2]$. Usando poi 3) si ottiene che Γ è nota anche in $(2, 3]$, e così via. Tale risultato puo' essere migliorato. Infatti è possibile provare che per $x \in (0, 1/2]$ vale la relazione

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

e da tale relazione ne segue che se Γ è nota in $(0, 1/2]$, allora Γ è nota anche in $[1/2, 1)$.

In conclusione:

I valori della funzione Γ sono noti, non appena siano noti i valori che Γ assume in $(0, 1/2]$.

Per tale motivo i valori di Γ vengono usualmente tabulati per $x \in (0, 1/2]$.

Usando le relazioni 2), ...5) è possibile poi estendere la definizione della funzione Γ anche sul semiasse negativo, ad eccezione dei punti $0, -1, -2, -3, ...$ Infatti da 2) si ha per $x \neq 0$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1);$$

poichè il secondo membro ha senso anche per $x \in (-1, 0)$ si puo' usare tale relazione per estendere la definizione di Γ anche all'intervallo $(-1, 0)$. In altre parole si pone

$$\Gamma(x) =_{\text{def}} \frac{1}{x}\Gamma(x+1) \qquad \text{se } x \in (-1, 0).$$

Usando poi le relazioni 3)..5) si puo' procedere nell'estensione della definizione di Γ sul semiasse negativo. Precisamente si ha

$$\Gamma(x) =_{\text{def}} \frac{1}{x(x+1)}\Gamma(x+2) \qquad \text{se } x \in (-2, -1)$$
$$\Gamma(x) =_{\text{def}} \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\Gamma(x+3) \qquad \text{se } x \in (-3, -4)$$

....

Si osservi infine che per quanto riguarda il comportamento della funzione Γ nei punti $x = 0, x = -1, x = -2,$ ..... si ha

$$\lim_{x \to -n} |\Gamma(x)| = +\infty \tag{2}$$

con $n = 0, 1, 2, ...$

3 Funzioni di Bessel (caso n reale)

Indicata con Γ la funzione Gamma Euleriana, per ogni $n \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \tag{3}$$

sono soluzioni dell'equazione di Bessel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x \in (0, +\infty) \tag{B}$$

Le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie.* Se n è intero positivo, poiché $\Gamma(k+n+1) = (n+k)!$, l'espressione (3) si riduce a quella vista in precedenza.

Nel caso particolare in cui n sia un intero negativo, i primi n termini della serie (3) sono nulli, in quanto $|\Gamma(k+n+1)| = +\infty$. Ad esempio, per $J_{-7}(x)$ si ha

$$J_{-7}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-6)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-7}. \tag{4}$$

Poiché $|\Gamma(k-6)| = +\infty$ se $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, i primi 7 termini di (4) sono nulli e quindi la somma in tale serie inizia effettivamente da $k = 7$, ossia

$$J_{-7}(x) = \sum_{k=7}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-6)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-7}.$$

Vale il seguente:

Teorema
(i) Fissato $n \in \mathbb{R}$ le funzioni J_n e J_{-n} sono entrambe soluzioni di (B).
(ii) Se n è intero, i.e. $n \in \mathbb{Z}$, allora

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x),$$

e quindi J_n e J_{-n} sono soluzioni linearmente dipendenti.

(iii) Se n è reale, ma non intero, i.e. $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, allora J_n e J_{-n} sono soluzioni linearmente indipendenti.

Pertanto se $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ricordando che lo spazio delle soluzioni di (B) ha dimensione 2, dal Teorema precedente (punto (iii)) si ha che tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x), \tag{5}$$

dove $c_i, i = 1, 2$ sono due opportune costanti reali.

Scegliendo poi in (5)

$$c_1 = \frac{\cos\ \pi n}{\sin\ \pi n}, \qquad c_2 = \frac{-1}{\sin\ \pi n}$$

si ottiene la soluzione di (B) data da

$$Y_n(x) = \frac{\cos\ \pi n}{\sin\ \pi n} J_n(x) - \frac{1}{\sin\ \pi n} J_{-n}(x) \qquad (n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Le funzioni Y_n si chiamano *funzioni di Bessel di seconda specie (*o anche *funzioni di Neumann)* e, per quanto appena detto, sono anch'esse soluzioni di (B).

Nel caso infine in cui n sia intero, si definiscono le funzioni di Bessel di seconda specie nel modo seguente:

$$Y_n(x) = \lim_{p \to n} \left(\frac{\cos\ \pi p}{\sin\ \pi p} J_p(x) - \frac{1}{\sin\ \pi p} J_{-p}(x) \right) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

e si può provare che anche in tal caso le funzioni Y_n sono soluzioni di (B).

Inoltre le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n sono linearmente indipendenti da J_n, sia nel caso n intero che nel caso $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Pertanto per ogni n reale tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$d_1 J_n(x) + d_2 Y_n(x).$$

dove d_1 e d_2 sono due arbitrarie costanti reali.

4 Funzioni di Bessel - Relazioni di ricorrenza

Per le funzioni di Bessel valgono le seguenti formule:

$$\frac{d}{dx} \left(x^n J_n(x) \right) = x^n J_{n-1}(x)$$
$$\frac{d}{dx} \left(x^{-n} J_n(x) \right) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

Da tali formule si ottengono poi le cosidette *formule di ricorrenza:*

$$\begin{aligned} xJ_n'(x) &= xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x) \\ xJ_n'(x) &= nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) \\ 2J_n'(x) &= J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \\ 2nJ_n(x) &= xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x). \end{aligned} \tag{6}$$

Le precedenti formule continuano a valere anche per le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n.

Esercizio 1. Provare che

$$\text{i)} \quad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$
$$\text{ii)} \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Proviamo (i). Dalla definizione di $J_{1/2}$ si ottiene

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(3/2)} (x/2)^{1/2} - \frac{1}{1!\Gamma(5/2)} (x/2)^{5/2} + \frac{1}{2!\Gamma(7/2)} (x/2)^{9/2} + \ldots\ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Usando le relazioni $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ e $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, viste nelle scorse lezioni, si ottiene

$$\begin{aligned} \Gamma(3/2) &= \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = (1/2)\sqrt{\pi} \\ \Gamma(5/2) &= \frac{3}{2}\Gamma(3/2) = (1/2)(3/2)\sqrt{\pi} \\ \Gamma(7/2) &= \frac{5}{2}\Gamma(5/2) = (1/2)(3/2)(5/2)\sqrt{\pi} \\ &\ldots\ldots. \end{aligned}$$

e quindi, sostituendo in (7)

$$J_{1/2}(x) = \frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} - \frac{(x/2)^{5/2}}{1!(1/2)(3/2)\sqrt{\pi}} + \frac{(x/2)^{9/2}}{2!(1/2)(3/2)(5/2)\sqrt{\pi}} + \ldots..$$

da cui

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + \ldots..\right) = \\ &= \frac{1}{x}\frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots..\right) = \\ &= \frac{1}{x}\frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} \sin x \end{aligned}$$

e l'asserto segue osservando che

$$\frac{1}{x}\frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}.$$

Esercizio 2. Utilizzando l'Esercizio 1 e le formule di ricorrenza (6) provare che

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x}\right)$$
$$J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{x\sin x + \cos x}{x}\right)$$

5 Formule asintotiche

Sia $n \geq 0$. Allora per $x \to +\infty$ valgono le seguenti formule asintotiche:

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

dove la scrittura $f \sim g$ significa

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

6 Le distribuzioni - Definizione

Indichiamo con L^1_{loc} lo spazio vettoriale

$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, assolutamente integrabile in ogni intervallo limitato e chiuso di $\mathbb{R}\}$;

vogliamo costruire un'estensione di tale spazio. [Il caso in cui f assuma valori in $\mathbb{C}$, ossia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, può essere trattato in modo simile]

Ricordiamo che una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *a supporto compatto* se esiste un intervallo compatto (i.e. limitato e chiuso) $[a, b]$ dell'asse reale tale che $\varphi(t) = 0$ se $t \notin [a, b]$. L'intervallo $[a, b]$, all'esterno del quale φ è nulla, si chiama *supporto di* φ. E' evidente che la funzione φ è univocamente individuata non appena siano noti i valori assunti da φ sul supporto.

Si consideri poi lo spazio vettoriale D formato da tutte le funzioni reali (di variabile reale) infinitamente derivabili e a supporto compatto, ossia

$$D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\}\,.$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni test* ed è possibile definire in tale spazio una nozione di convergenza (vedi Appendice).

Si osservi poi che il supporto dipende dalla funzione φ considerata. Ad esempio la funzione α data da

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-t^2)} & \text{se } |t| < 1 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a D ed il suo supporto è $[-1, 1]$. Analogamente la funzione β data da

$$\beta(t) = \begin{cases} e^{-1/(4-t^2)} & \text{se } |t| < 2 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a D ed il suo supporto è $[-2, 2]$.

Ciò premesso si chiama *spazio delle distribuzioni* l'insieme formato da tutti i funzionali (vedi Appendice) lineari e continui definiti su D. Tale spazio si indica con il simbolo $\mathfrak{D}$ ossia

$$\mathfrak{D} = \{T : D \to \mathbb{R},\ \text{lineare e continuo}\}$$

Pertanto $T \in \mathfrak{D}$ se :
1) T è un funzionale, i.e. $T : D \to \mathbb{R}$
2) T è lineare, ossia

$$T(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1T(\varphi_1) + c_2T(\varphi_2), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D.$$

3) T è continuo, ossia se $\{\varphi_n\} \xrightarrow{D} \varphi$, allora $\{T(\varphi_n)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi)$.

7 Esempi

Sono elementi di $\mathfrak{D}$ (e quindi distribuzioni) i seguenti funzionali (dove φ indica una generica funzione di D):

1. $T_{\sin t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \sin t \ \varphi(t) \ dt$
2. $T_{t^3}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} t^3 \ \varphi(t) \ dt$
3. $T_{e^t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} e^t \ \varphi(t) \ dt.$

   In generale, **fissata** una funzione $f \in L^1_{loc}$, sono elementi di $\mathfrak{D}$ i funzionali del tipo

4. $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \ \varphi(t) \ dt,$

   dove φ indica, come prima, una generica funzione di D.

   Altre distribuzioni (i.e. elementi di $\mathfrak{D}$) sono poi i funzionali

5. $\Delta_0(\varphi) = \varphi(0)$
6. $\Delta_a(\varphi) = \varphi(a)$

   dove a è un generico numero reale e φ è una generica funzione di D.

Usualmente i funzionali Δ_0, Δ_a vengono indicati con i simboli $\delta(t), \delta(t-a)$.

In riferimento all'Esempio 1., il valore $T_{\sin t}(\varphi)$, assunto dal funzionale T, viene indicato con

$$T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle \, .$$

Il simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si chiama *crochet;* e la scrittura $\langle \sin t, \varphi(t) \rangle$ si legge *crochet tra* $\sin t$ *e* φ.

Pertanto le distribuzioni sopra definite negli Esempi 1., 2., 3., 4. si indicano anche con i simboli

1. $T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \sin t \ \varphi(t) \ dt$
2. $T_{t^3}(\varphi) = \langle t^3, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} t^3 \ \varphi(t) \ dt$
3. $T_{e^t}(\varphi) = \langle e^t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} e^t \ \varphi(t) \ dt.$

4.
$$T_f(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt, \tag{8}$$

dove f è una fissata funzione in $\in L^1_{loc}$.

Analogamente per le distribuzioni $\delta(t)$ e $\delta(t-a)$ si ha

5.
$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(0)$$

6.
$$\langle \delta(t-a), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(a).$$

8 Le distribuzioni come estensione dello spazio L^1_{loc}

Mostriamo che lo spazio $\mathfrak{D}$ è una estensione dello spazio

$$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ assolutamente integrabile in ogni compatto di } \mathbb{R}\}.$$

Ricordiamo che in L^1_{loc} due funzioni f, g, coincidono se

$$f(t) = g(t), \qquad \text{eccetto un insieme di misura nulla.}$$

Ciò premesso si ha il seguente:

Teorema - *Siano $f, g \in L^1_{loc}$. Se*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\ \varphi(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)\ \varphi(t)\ dt \qquad \forall \varphi \in D \tag{9}$$

(ossia, usando le notazione con il crochet, se

$$\langle f(t), \varphi(t) \rangle = \langle g(t), \varphi(t) \rangle \qquad \forall \varphi \in D\ ) \tag{10}$$

allora f e g coincidono in L^1_{loc}. Vale poi, ovviamente, il viceversa, ossia se f e g coincidono in L^1_{loc}, allora (9) [i.e.(10)] è soddisfatta.

Da questo risultato ne segue che le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}$, definite tramite funzioni di L^1_{loc}, ossia le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}$ il cui crochet è dato da (8) sono *"tante quanti gli elementi di L^1_{loc}".*

In altre parole, se indichiamo con $\mathfrak{D}^*$ il sottoinsieme di $\mathfrak{D}$ formato da tutte le distribuzioni "definite tramite funzioni di L^1_{loc}", ossia il cui crochet è dato da (8), i.e.

$$\mathfrak{D}^* = \left\{ T \in \mathfrak{D} \ : \exists f \in L^1_{loc} : T(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt \qquad \forall \varphi \in D \right\},$$

per il Teorema precedente, il sottospazio $\mathfrak{D}^*$ è in corrispondenza biunivoca con L^1_{loc}, ossia

$$\mathfrak{D}^* \sim L^1_{loc}$$

Quindi lo spazio delle distribuzioni $\mathfrak{D}$ può essere interpretato come una estensione di L^1_{loc}.

In altre parole, **ogni** $f \in L^1_{loc}$ può essere pensata come distribuzione (precisamente quella il cui crochet è definito da (8).

9 Appendice

9.1 Convergenza nello spazio D delle funzioni test

La nozione di convergenza nello spazio D delle funzioni test si definisce nel seguente modo: diremo che una successione $\{\varphi_n\}$ converge a φ se:

1) $\varphi_n, \varphi \in D$;

2) esiste un intervallo limitato e chiuso $I = [a, b]$ tale che $\varphi_n(t) = \varphi(t) = 0$ se $t \notin I$;

3) la successione $\left\{\varphi_n^{(i)}\right\}$ converge uniformemente a $\varphi^{(i)}$ in $\mathbb{R}$ per $i = 0, 1, 2, 3...$

ossia fissato $\varepsilon > 0$ e fissato $i = 0, 1, 2, ...$ $\exists$ $n(\varepsilon, i)$ **(indipendente da** t) tale che per ogni $n > n(\varepsilon, i)$ si ha $|\varphi_n^{(i)}(t) - \varphi^{(i)}(t)| < \varepsilon$ $\forall t \in I$.

9.2 Funzionale

Sia V uno spazio vettoriale; si chiama *funzionale in* V ogni funzione F definita in V e a valori in $\mathbb{R}$, i.e.

$$F : V \to \mathbb{R}.$$

Ad esempio se V è lo spazio delle funzioni continue in $[0,1]$, sono funzionali in V i seguenti (dove $x = x(t)$ indica una generica funzione continua in $[0,1]$):

$$
\begin{aligned}
F_1(x) &= \int_0^1 x(s)ds \\
F_2(x) &= \max_{t \in [0,1]} |x(t)| \\
F_3(x) &= 437x(0) + 567x(1)
\end{aligned}
$$

Tale funzionale poi e' lineare se e' verificata la relazione

$$F(cx_1 + dx_2) = cF(x_1) + dF(x_2), \quad \forall c, d \in \mathbb{R},\ \forall x_1, x_2 \in V.$$