

# ANALISI MATEMATICA III

## ELM+TEM

A.A. 2015-2016

Traccia delle lezioni del 27 e 29 aprile 2016

April 29, 2016

## 1 Le distribuzioni - Richiami

Indichiamo con  $L^1_{loc}$  lo spazio vettoriale

$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ assolutamente integrabile in ogni intervallo limitato e chiuso di } \mathbb{R}\};$

vogliamo costruire un'estensione di tale spazio. [Il caso in cui  $f$  assuma valori in  $\mathbb{C}$ , ossia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , può essere trattato in modo simile]

Sia poi  $D$  lo spazio vettoriale

$$D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\}.$$

Ciò premesso, come visto la scorsa settimana, si chiama *spazio delle distribuzioni* l'insieme formato da tutti i funzionali lineari e continui definiti su  $D$ . Tale spazio si indica con il simbolo  $\mathfrak{D}$  ossia

$$\mathfrak{D} = \{T : D \rightarrow \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Pertanto  $T \in \mathfrak{D}$  se :

- 1)  $T$  è un funzionale, i.e.  $T : D \rightarrow \mathbb{R}$
- 2)  $T$  è lineare, ossia

$$T(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1T(\varphi_1) + c_2T(\varphi_2), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D.$$

- 3)  $T$  è continuo, ossia se  $\{\varphi_n\} \xrightarrow{D} \varphi$ , allora  $\{T(\varphi_n)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi)$ .

## 2 Esempi

Sono elementi di  $\mathfrak{D}$  (e quindi distribuzioni) i seguenti funzionali (dove  $\varphi$  indica una generica funzione di  $D$ ):

1.  $T_{\sin t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \sin t \varphi(t) dt$

2.  $T_{t^3}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} t^3 \varphi(t) dt$

3.  $T_{e^t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} e^t \varphi(t) dt.$

In generale, **fissata** una funzione  $f \in L^1_{loc}$ , sono elementi di  $\mathfrak{D}$  i funzionali del tipo

4.  $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt,$

dove  $\varphi$  indica, come prima, una generica funzione di  $D$ .

Altre distribuzioni (i.e. elementi di  $\mathfrak{D}$ ) sono poi i funzionali

5.  $\Delta_0(\varphi) = \varphi(0)$

6.  $\Delta_a(\varphi) = \varphi(a)$

dove  $a$  è un generico numero reale e  $\varphi$  è una generica funzione di  $D$ .

Usualmente i funzionali  $\Delta_0, \Delta_a$  vengono indicati con i simboli  $\delta(t), \delta(t-a)$ .

In riferimento all'Esempio 1., il valore  $T_{\sin t}(\varphi)$ , assunto dal funzionale  $T$ , viene indicato con

$$T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle.$$

Il simbolo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  si chiama *crochet*; e la scrittura  $\langle \sin t, \varphi(t) \rangle$  si legge *crochet tra  $\sin t$  e  $\varphi$* .

Pertanto le distribuzioni sopra definite negli Esempi 1., 2., 3., 4. si indicano anche con i simboli

1.  $T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \sin t \varphi(t) dt$

2.  $T_{t^3}(\varphi) = \langle t^3, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} t^3 \varphi(t) dt$

3.  $T_{e^t}(\varphi) = \langle e^t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} e^t \varphi(t) dt.$

4.

$$T_f(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt, \quad (1)$$

dove  $f$  è una fissata funzione in  $L^1_{loc}$ .

Analogamente per le distribuzioni  $\delta(t)$  e  $\delta(t-a)$  si ha

5.

$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(0)$$

6.

$$\langle \delta(t-a), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(a).$$

### 3 Le distribuzioni come estensione dello spazio

$L^1_{loc}$

Nella scorsa settimana si è visto che le distribuzioni  $T \in \mathfrak{D}$ , definite tramite funzioni di  $L^1_{loc}$ , ossia le distribuzioni  $T \in \mathfrak{D}$  il cui crochet è dato da (1), sono "tante quanti gli elementi di  $L^1_{loc}$ ".

In altre parole, se indichiamo con  $\mathfrak{D}^*$  il sottoinsieme di  $\mathfrak{D}$  formato da tutte le distribuzioni "definite tramite funzioni di  $L^1_{loc}$ ", ossia il cui crochet è dato da (1), i.e.

$$\mathfrak{D}^* = \left\{ T \in \mathfrak{D} : \exists f \in L^1_{loc} : T(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in D \right\},$$

allora, il sottospazio  $\mathfrak{D}^*$  è in corrispondenza biunivoca con  $L^1_{loc}$ , ossia

$$\mathfrak{D}^* \sim L^1_{loc}$$

Quindi lo spazio delle distribuzioni  $\mathfrak{D}$  può essere interpretato come una estensione di  $L^1_{loc}$ .

In altre parole, **ogni**  $f \in L^1_{loc}$  può essere pensata come distribuzione (precisamente quella il cui crochet è definito da (1)).

Non è difficile poi provare che si tratta di una **effettiva** estensione, in quanto esistono anche distribuzioni, ad esempio  $\delta(t)$ ,  $\delta(t-a)$ , che **non** possono essere definite tramite funzioni di  $L^1_{loc}$ , e quindi che **non** appartengono a  $\mathfrak{D}^*$

In altre parole, proviamo che

$$\mathfrak{D}^* \subsetneq \mathfrak{D}.$$

A tal fine è sufficiente mostrare che la distribuzione  $\delta(t)$  data da

$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(0) \quad (2)$$

**non** appartiene a  $\mathfrak{D}^*$ .

Per assurdo, sia  $\delta(t) \in \mathfrak{D}^*$ . Allora esiste  $f \in L^1_{loc}$  tale che

$$\langle f(t), \varphi(t) \rangle = \langle \delta(t), \varphi(t) \rangle \text{ per ogni } \varphi \in D. \quad (3)$$

Poiché  $f \in L^1_{loc}$ , la (3) diviene

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt = \langle \delta(t), \varphi(t) \rangle \quad \forall \varphi \in D$$

ossia, per (2)

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in D. \quad (4)$$

Poiché (4) vale  $\forall \varphi \in D$ , (4) vale in particolare per le funzioni  $\varphi_n$  così definite:

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-n^2t^2)} & \text{se } |t| < 1/n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}. \quad (5)$$

Si osservi che tutte le funzioni  $\varphi_n$  appartengono a  $D$  e inoltre

$$\varphi_n(0) = 1, \quad 0 \leq \varphi_n(t) \leq 1.$$

Allora la (4) per le funzioni  $\varphi_n$  diviene

$$\int_{-1/n}^{1/n} f(t) \varphi_n(t) dt = 1. \quad (6)$$

Mostriamo che tale uguaglianza è assurda. Infatti si ha

$$\left| \int_{-1/n}^{1/n} f(t) \varphi_n(t) dt \right| \leq \int_{-1/n}^{1/n} |f(t)| \varphi_n(t) dt$$

da cui, poiché  $0 \leq \varphi_n(t) \leq 1$ ,

$$\left| \int_{-1/n}^{1/n} f(t) \varphi_n(t) dt \right| \leq \int_{-1/n}^{1/n} |f(t)| dt. \quad (7)$$

Passando al limite per  $n \rightarrow \infty$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/n}^{1/n} |f(t)| dt = 0,$$

in quanto l'ampiezza dell'intervallo di integrazione tende a zero e  $f \in L_{loc}^1$ . Allora da (7) si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{-1/n}^{1/n} f(t) \varphi_n(t) dt \right| = 0.$$

Pertanto il primo membro di (6) può essere reso piccolo a piacere e quindi **NON** può essere uguale a 1.

**In conclusione,  $D^*$  (ossia  $L_{loc}^1$ ) è un sottoinsieme proprio di  $D$ .** Pertanto si ha

$$L_{loc}^1 \sim \mathfrak{D}^* \subsetneq \mathfrak{D}$$

i.e.  $\mathfrak{D}^*$  è strettamente contenuto in  $\mathfrak{D}$ , in quanto, come si è appena affermato, le distribuzioni  $\delta(t), \delta(t-a)$ , prima considerate, non sono elementi di  $\mathfrak{D}^*$ .

## 4 Convergenza nello spazio delle distribuzioni

Per analizzare le proprietà delle distribuzioni, in particolare quelle che **non** "provengono" da funzioni di  $L_{loc}^1$ , è utile introdurre in  $\mathfrak{D}$  una nozione di convergenza. Precisamente diremo che *una successione di distribuzioni  $\{T_n\}$  converge in  $\mathfrak{D}$  ad una distribuzione  $T$  se la successione numerica  $\{T_n(\varphi)\}$  converge a  $T(\varphi)$  per ogni  $\varphi \in D$* ; ossia

$$\{T_n\} \xrightarrow{(\mathfrak{D})} T \quad \text{se} \quad \{T_n(\varphi)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi) \quad \forall \varphi \in D$$

o, equivalentemente,

$$\lim_n T_n \stackrel{(\mathfrak{D})}{=} T \quad \text{se} \quad \lim_n T_n(\varphi) \stackrel{\mathbb{R}}{=} T(\varphi) \quad \forall \varphi \in D.$$

dove il simbolo ( $\mathfrak{D}$ ) significa che il limite è effettuato in  $\mathfrak{D}$ . Utilizzando tale nozione, si può provare il seguente Teorema (di rappresentazione):

**Teorema** - Ogni distribuzione è limite (in  $\mathfrak{D}$ ) di una successione di elementi di  $L_{loc}^1$ , ossia

$$\overline{L_{loc}^1} = \mathfrak{D}.$$

In altre parole il Teorema precedente afferma che per **ogni**  $T \in \mathfrak{D}$ , esiste una successione  $\{f_n(t)\}$ , contenuta in  $L_{loc}^1$ , che converge in  $\mathfrak{D}$  (nel senso sopra specificato) alla distribuzione  $T$ .

Ad esempio, nel corso della lezione si è provato che la distribuzione  $\delta(t)$  è il limite (in  $\mathfrak{D}$ ) della successione  $\{k_n(t)\}$ , dove

$$k_n(t) = \begin{cases} n & \text{se } t \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In altre parole la successione  $\{k_n(t)\}$  converge, **nel senso delle distribuzioni**, alla distribuzione  $\delta(t)$ , i.e.:

$$\delta(t) \stackrel{(*)}{=} \lim_n k_n(t)$$

dove (\*) significa, come appena detto, che il limite è effettuato in  $\mathfrak{D}$ .

## 5 Derivata di una distribuzione

Sia  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . Allora  $f' \in L_{loc}^1$  e quindi  $f'$  può essere pensata come distribuzione e sia ha

$$\langle f'(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(t) \varphi(t) dt.$$

Utilizzando la regola di integrazione per parti si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} f'(t) \varphi(t) dt = - \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi'(t) dt = - \langle f(t), \varphi'(t) \rangle;$$

pertanto

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \implies \langle f'(t), \varphi(t) \rangle = - \langle f(t), \varphi'(t) \rangle.$$

Tale relazione suggerisce la seguente:

**Definizione** - Sia  $T$  una distribuzione; si chiama *derivata di  $T$*  (nel senso delle distribuzioni) e si indica con  $DT$ , la distribuzione definita da

$$\langle DT, \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} -\langle T, \varphi'(t) \rangle, \quad \forall \varphi \in D.$$

Proprietà:

- Ogni distribuzione è derivabile infinite volte.
- Se  $f \in C^1(\mathbb{R}) \implies f' \equiv Df$
- Indicata con  $u = u(t)$  la funzione scalino (di Heaveside)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

si ha

$$D[u(t)] = \delta(t).$$

- $D[u(t) - u(t - a)] = \delta(t) - \delta(t - a)$ .
- **Teorema** - Se  $f \in C^1(\mathbb{R}/\{t_0\})$  e  $f, f' \in L^1_{loc}$ , allora

$$f(t_0+) = \lim_{t \rightarrow t_0+} f(t), \quad f(t_0-) = \lim_{t \rightarrow t_0-} f(t),$$

esistono finiti e si ha

$$Df = f'(t) + [f(t_0+) - f(t_0-)]\delta(t - t_0).$$

Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 5e^{2t} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ,$$

si ha

$$Df = f'(t) + 5\delta(t).$$

Il teorema precedente si estende poi immediatamente al caso in cui  $f$  sia derivabile con derivata continua in tutto  $\mathbb{R}$ , eccetto un numero finito o un'infinità numerabile di punti.

- La distribuzione  $\delta(t)$  è derivabile e si ha

$$\begin{aligned}\langle \delta'(t), \varphi(t) \rangle &=_{\text{def}} -\varphi'(0), \quad \forall \varphi \in D \\ \langle \delta''(t), \varphi(t) \rangle &=_{\text{def}} \varphi''(0), \quad \forall \varphi \in D \\ &\dots\dots\dots \\ \langle \delta^{(n)}(t), \varphi(t) \rangle &=_{\text{def}} (-1)^n \varphi^{(n)}(0), \quad \forall \varphi \in D.\end{aligned}$$

In modo analogo si definiscono le derivate di  $\delta(t - a)$ .

## 6 Prodotto di distribuzioni

Ricordiamo che nello spazio  $L^1_{loc}$  il prodotto non sempre è definito. Ad esempio la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a  $L^1_{loc}$ , ma  $f^2 \notin L^1_{loc}$ . Tuttavia se  $f \in L^1_{loc}$  e  $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ , allora il prodotto  $f g$  è, ovviamente, definito e si ha

$$\langle f g, \varphi \rangle = \langle f, g \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D.$$

Tale relazione suggerisce la seguente:

**Definizione** - Sia  $T$  una distribuzione e sia  $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Si chiama *distribuzione prodotto*  $T g$  la distribuzione definita da

$$\langle T g, \varphi \rangle = \langle T, g \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D$$

Nello spazio delle distribuzioni si definisce il prodotto soltanto nel caso precedente, i.e. quando almeno uno dei due fattori è una funzione ("tradizionale") di classe  $C^\infty(\mathbb{R})$ . Pertanto, ad esempio, non si definiscono i simboli  $\delta^2(t)$ ,  $e^{-|t|}\delta(t)$ ,  $(\log t)\delta(t)$ ,  $t^{-7}\delta(t)$ .

Provare che

$$\begin{aligned}e^{2t}\delta(t) &= \delta(t); \\ (t^2 + 4)\delta(t) &= 4\delta(t) \\ \sin t\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) &= \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

## ESERCIZI

Verificare che

$$D[(3 + 5t)\delta'(t - 1)] = -5\delta'(t - 1) + 8\delta''(t - 1)$$

$$(t - 1)\delta'(t) = D[(\sin t)\delta'(t) - u(t)]$$

$$tDf = f(t) - 4\delta(t - 2)$$

dove  $f(t) = t[u(t) - u(t - 2)]$ .