

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2015-2016

Traccia della lezione del 11 maggio 2016

May 11, 2016

1 Trasformata di Laplace di distribuzioni

Prima di introdurre la trasformata di Laplace nel senso delle distribuzioni, poniamo le seguenti definizioni.

Definizione 1 - Sia T una distribuzione, ossia $T \in \mathfrak{D}$. Allora T si dice *nulla in un intervallo* (a, b) se

$$\langle T, \varphi(t) \rangle = 0$$

per ogni $\varphi \in D$ e avente supporto contenuto in (a, b) .

Definizione 2 - Sia T una distribuzione, ossia $T \in \mathfrak{D}$. Si chiama *insieme nullo* di T , e si indica con N_T , l'unione di tutti gli intervalli aperti (a, b) in cui T è nulla. Il suo complementare in $\mathbb{R}$ si chiama poi *supporto* di T .

Poiché N_T è unione (infinita) di aperti, N_T è un insieme aperto di $\mathbb{R}$. Il supporto di T , essendo il complementare di un aperto è allora un insieme chiuso di $\mathbb{R}$.

Esempi

1. Sia f la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 4 & \text{se } t \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Allora $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e quindi f è una distribuzione. L'insieme nullo N_f è

$$N_f = (-\infty, -\pi) \cup (\pi, +\infty)$$

e di conseguenza il supporto di f è $[-\pi, \pi]$ (come ovviamente era lecito attendersi).

2. Sia f la funzione

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Allora $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e quindi f è una distribuzione. L'insieme nullo N_f è

$$N_f = (-\infty, 0)$$

e. di conseguenza, il supporto di f è $[0, +\infty)$ (come ovviamente era lecito attendersi).

3. Per la distribuzione δ si ha poi $N_\delta = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e quindi il supporto di δ è $\{0\}$. Analogamente il supporto di $\delta(t - a)$ è $\{a\}$.

Ciò posto, si ha la seguente definizione. Sia T una distribuzione tale che:

- 1) il supporto di T è contenuto in $[0, +\infty)$;
- 2) esiste $\beta \in \mathbb{R}$ tale che

$$Te^{-\beta t} \text{ è una distribuzione temperata.} \quad (1)$$

Sia α_T l'estremo inferiore delle costanti β soddisfacenti (1).

DEFINIZIONE - Si chiama *trasformata di Laplace* (nel senso delle distribuzioni) di T , e si indica con $L_D[T]$, il *crochet*

$$L_D[T] = \langle Te^{-\beta t}, e^{\beta t} \lambda(t) e^{-st} \rangle \quad (2)$$

dove $\operatorname{Re} s > \beta > \alpha_T$ e λ è una funzione tale che

$$\begin{aligned} \lambda &\in C^\infty(\mathbb{R}) \\ \lambda(t) &= 1 \quad \text{se } t \geq \varepsilon \quad (\varepsilon < 0) \\ \lambda(t) &= 0 \quad \text{se } t \leq \sigma, \quad (\sigma < \varepsilon < 0). \end{aligned} \quad (3)$$

Si può provare che il crochet (2) è indipendente dalla scelta della funzione λ (purché siano verificate le condizioni (3)) e dalla scelta di β . Il crochet (2) dipende invece dal numero complesso s ed è quindi una funzione complessa $F(s)$, ossia

$$L_D[T] = F(s) = \langle T e^{-\beta t}, e^{\beta t} \lambda(t) e^{-st} \rangle.$$

. Pertanto la trasformata di Laplace di una distribuzione T è una **funzione "tradizionale"**, non una distribuzione, come accade invece per la trasformata di Fourier.

Si osservi poi che, per le ipotesi fatte, il primo elemento del crochet, ossia $T e^{-\beta t}$ è una distribuzione temperata, mentre il secondo, i.e. $e^{\beta t} \lambda(t) e^{-st}$, è una funzione a decrescenza rapida, ossia un elemento di S , i.e. una funzione a decrescenza rapida.

2 Relazione con la trasformata "classica"

Ricordiamo quanto visto nelle passate lezioni per la trasformata di Laplace "in senso classico".

Sia $f \in \Lambda^1$, ossia tale che:

$$1) \quad f(t) = 0 \quad \text{se} \quad t < 0; \tag{4}$$

$$2) \text{ esiste } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(t) e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R})$$

e sia α_f la sua ascissa di convergenza, i.e.

$$\alpha_f = \inf \{ x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(t) e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R}) \}.$$

Allora la trasformata di Laplace $L[f]$ di f è data da

$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \tag{5}$$

dove s è un qualunque numero complesso con $\operatorname{Re} s > \alpha_f$.

Pertanto:

Teorema Se f soddisfa (4), allora la trasformata di Laplace di f (in senso classico) **coincide** con la trasformata di Laplace nel senso delle distribuzioni, ossia

$$L_D[f] \equiv L[f].$$

Di conseguenza, la definizione (2) assume significato quando, ferme restando le altre condizioni, T non sia una funzione di classe Λ^1 .

Un semplice calcolo fornisce la seguente tabella:

$$\begin{aligned} L_D[\delta(t)] &= 1 \\ L_D[\delta'(t)] &= s \\ &\dots\dots\dots \\ L_D[\delta^{(n)}(t)] &= s^n. \end{aligned}$$

Inoltre

$$L_D[\delta(t-a)] = e^{-sa}, \quad a > 0.$$

3 Funzioni razionali

Il seguente risultato generalizza quello visto nella prima parte del corso.

Teorema Ogni funzione razionale

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

è una trasformata di Laplace. Precisamente, se $\text{grado } N < \text{grado } D$, F è la trasformata di Laplace una funzione di classe Λ^1 ; altrimenti, se $\text{grado } N \geq \text{grado } D$, F è la trasformata di Laplace di una distribuzione.

Ad esempio le funzioni

$$F_1(s) = \frac{s^3 + 8}{s^2 + 3s + 2}, \quad F_2(s) = \frac{s^3 + 8}{s^3 + 3s + 2}$$

sono trasformate di una distribuzione, mentre

$$F_3(s) = \frac{s^2 + 8}{s^3 + 3s^2 + 2}$$

è la trasformata di una funzione di classe Λ^1 .

Quando **grado** $N \geq$ **grado** D , il calcolo della antitrasformata di $F = N/D$ si effettua effettuando preliminarmente la divisione tra i due polinomi N e D e poi usando la tabella precedente e il metodo visto nelle passate lezioni.

In particolare, per la funzione F_1 , effettuando la divisione si ottiene

$$F_1(s) = s - 3 + \frac{7s + 14}{s^2 + 3s + 2}.$$

L'antitrasformata è quindi

$$\delta'(t) - 3\delta(t) + g(t)$$

dove g è l'antitrasformata di

$$\frac{7s + 14}{s^2 + 3s + 2} \quad (6)$$

Essendo (6) una funzione razionale propria, la funzione g si calcola con la teoria dei residui.

4 Derivazione

Ricordiamo il seguente:

Teorema (derivazione "in senso classico") Sia $g \in C^1(0, +\infty)$, $g, g' \in \Lambda^1$. Allora si ha:

$$L[g'] = sL[g] - g(0+) ; \quad (7)$$

nell'ambito delle distribuzioni vale il seguente

Teorema (derivazione "nel senso delle distribuzioni") Sia T una distribuzione che ammette trasformata di Laplace (nel senso delle distribuzioni) $L_D[T]$. Allora anche DT ammette trasformata di Laplace (nel senso delle distribuzioni) e si ha

$$L_D[DT] = sL_D[T].$$

In particolare, se $g \in \Lambda^1$, allora si ha

$$L_D[Dg] = sL[g]. \quad (8)$$

I due teoremi precedenti, in particolare (7) e (8), mettono di nuovo in luce che, in generale,

$$g' \text{ **non coincide con** } Dg.$$

Si osservi poi che se $g \notin C^1(0, +\infty)$, allora (7) può non valere. A tal fine è sufficiente considerare la funzione

$$h(t) = u(t) - u(t - 5).$$

Per tale funzione si ha poi

$$Dh = \delta(t) - \delta(t - 5)$$

e quindi

$$L_D[Dh] = 1 - e^{-5s}.$$

D'altra parte

$$L[h] = \int_0^5 e^{-st} dt = \frac{1}{s} - \frac{e^{-5s}}{s}$$

e quindi, in accordo con (8), si ottiene $L_D[Dh] = sL[h]$.