ANALISI MATEMATICA III
ELM+TEM
A.A. 2015-2016
Traccia della lezione del 13 maggio 2016

May 13, 2016

1 Serie di distribuzioni

Sia $\{T_n\}$ una successione di distribuzioni. Diremo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n$$

converge, se converge la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} < T_n, \varphi > \quad \text{per ogni} \quad \varphi \in D.$$

Si provi, a titolo di esercizio, che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

converge. Tale serie, nota anche come *"pettine di Dirac"* rappresenta la derivata (nel senso delle distribuzioni) della funzione

$$\sum_{n=0}^{\infty} u(t - nT).$$

2 La distribuzione v.p. (1/t)

Consideriamo il funzionale T definito da

$$T : \varphi \in D \to \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt. \tag{1}$$

L'integrale in (1) è ben definito in quanto la funzione integranda è nulla per ogni t sufficientemente grande ($\varphi \in D$) ed inoltre

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} = 2\varphi'(0).$$

Si può provare che tale funzionale è lineare e continuo in D e quindi è una distribuzione. Tale distribuzione si indica con $v.p.1/t$, ossia

$$\left\langle v.p.\frac{1}{t}, \varphi(t) \right\rangle =_{\text{def}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt.$$

Il motivo del nome dato a questa distribuzione è giustificato dal fatto che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{t} \varphi(t) dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{t} \varphi(t) dt \right),$$

ossia

$$\left\langle v.p.\frac{1}{t}, \varphi(t) \right\rangle =_{\text{def}} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{t} \varphi(t) dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{t} \varphi(t) dt \right)$$

dove ε è una costante positiva.

Proprietà:

- la derivata nel senso delle distribuzioni di $\log |t|$ è $v.p.\frac{1}{t}$,i.e.

$$D(\log |t|) = v.p.\frac{1}{t}.$$

- Si ha $t \cdot v.p.\frac{1}{t} = 1$.

Infatti, usando il crochet e ricordando la definizione di prodotto di distribuzioni, si ottiene $\forall \varphi \in D$

$$\left\langle t \cdot \ v.p.\frac{1}{t}, \varphi(t) \right\rangle = \left\langle v.p.\frac{1}{t}, t\varphi(t) \right\rangle =$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{t\varphi(t) + t\varphi(-t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} (\varphi(t) + \varphi(-t)) dt =$$
$$= . \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} \varphi(-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = \langle 1, \varphi(t) \rangle$$

- Trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = -j \ v.p.\frac{1}{\omega} + \pi\delta(\omega)$$
$$\mathcal{F}\{sgn(t)\} = -2j \ v.p.\frac{1}{\omega},$$

dove $u(t)$ rappresenta la funzione scalino e $sgn(t)$ la funzione ”segno”, i.e.

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t > 0 \\ -1 & \text{se} \quad t < 0. \end{cases} .$$

3 Esercizi (facoltativi)

Esercizio n.1 - Siano

$$T_1 = \sin t \cdot \ v.p.\frac{1}{t}$$
$$T_2 = t^n \cdot v.p.\frac{1}{t}$$

Provare che T_1, T_2 sono temperate e calcolarne la trasf. di Fourier.

Soluzione

Per definizione di prodotto, T_1 e T_2 sono distribuzioni. Utilizzando il crochet si ottiene

$$T_1 = \frac{\sin t}{t}$$
$$T_2 = t^{n-1}.$$

Quindi entrambe sono distribuzioni temperate, in quanto funzioni a crescita lenta. La trasformata di Fourier di T_1 coincide con la trasformata classica vista nelle prime lezioni, ossia con l'impulso rettangolare:

$$\mathcal{F}_D\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \begin{cases}\pi \text{ se } |\omega| \leq 1\\ 0 \text{ altrimenti}\end{cases}$$

Per T_2 si ha dalla tabella di sopra

$$\mathcal{F}_D\left\{t^{n-1}\right\} = 2\pi j^{n-1}\delta^{(n-1)}(\omega).$$

Esercizio n.2 - Sia

$$T = 3t \cdot \; v.p.\frac{1}{t} - (e^{3t}-1)\delta(t).$$

Provare che T è temperata e

$$\mathcal{F}_D\left\{T\right\} = 6\pi\delta(\omega).$$

Esercizio n.3 - Calcolare la trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni) di

$$u(t-1),$$
$$u(1-t).$$

Soluzione Poiché

$$1 = u(t-1) + u(1-t),$$

e la trasformata di 1 è nota, è sufficiente calcolare la trasformata di $u(t-1)$. Avendosi

$$u(t-1) = u(t) - f(t), \tag{2}$$

dove

$$f(t) = \begin{cases} 1 \;\; \text{se } 0 < t < 1\\ 0 \qquad \text{altrimenti}\end{cases},$$

la trasf. di Fourier nel senso delle distribuzioni di f coincide con la trasformata classica, ossia

$$\mathcal{F}\left\{f\right\} = \int_0^1 e^{-j\omega t}dt = \frac{1-e^{-j\omega}}{j\omega}.$$

Allora da (2) si ottiene

$$\mathcal{F}_D\left\{u(t-1)\right\} = -j \; vp\frac{1}{\omega} + \pi\delta(\omega) - \frac{1-e^{-j\omega}}{j\omega}.$$