

ANALISI MATEMATICA III

ELM+TEM

A.A. 2015-2016

Traccia delle lezioni del 04 e 06 maggio 2016

May 6, 2016

1 Distribuzioni temperate

Si consideri lo spazio vettoriale S definito da

$$S = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : t^j \varphi^{(k)}(t) \rightarrow 0 \text{ per } |t| \rightarrow +\infty, j, k = 0, 1, 2, \dots \}.$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni a decrescenza rapida*. Infatti una funzione φ appartiene a tale spazio se è infinitamente derivabile e tende a zero (per $t \rightarrow \pm\infty$), insieme a tutte le derivate $\varphi^{(i)}$, più velocemente di t^{-n} per ogni $n > 0$. Ad esempio, la funzione $\varphi(t) = e^{-t^2}$ appartiene a S . Invece la funzione $\varphi(t) = e^{-|t|}$ non appartiene ad S perché, pur tendendo a zero (per $t \rightarrow \pm\infty$), insieme a tutte le derivate $\varphi^{(i)}$, più velocemente di t^{-n} per ogni $n > 0$, non è derivabile in $t = 0$. Ricordando la definizione dello spazio D delle funzioni test

$$D = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto} \},$$

si ha

$$D \subsetneq S.$$

E' poi possibile definire in S una nozione di convergenza.

Ciò premesso si consideri lo spazio formato da tutti i funzionali lineari e continui definiti su S . Tale spazio si indica con il simbolo $\mathfrak{S}$, ossia

$$\mathfrak{S} = \{T : S \rightarrow \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Tenendo conto che

$$D \subsetneq S,$$

si ha allora

$$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{D},$$

ossia $\mathfrak{S}$ è un sottospazio di $\mathfrak{D}$. Gli elementi di $\mathfrak{S}$ sono quindi particolari distribuzioni, che prendono nome di *distribuzioni temperate* e il sottospazio $\mathfrak{S}$ si chiama *spazio delle distribuzioni temperate*.

E' possibile provare che lo spazio delle distribuzioni temperate è strettamente contenuto in $\mathfrak{D}$. Infatti le funzioni

$$e^t, e^{-t}, \sinh t, \cosh t, e^t u(t), e^{-t} u(-t),$$

pur essendo funzioni in L^1_{loc} , e quindi distribuzioni, ossia elementi di $\mathfrak{D}$, **non** sono distribuzioni temperate. Pertanto lo spazio delle distribuzioni temperate è un sottospazio proprio dello spazio delle distribuzioni, ossia

$$\mathfrak{S} \subsetneq \mathfrak{D}.$$

E' possibile provare che sono distribuzioni temperate (i.e. elementi di $\mathfrak{S}$):

1. le funzioni $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ (quindi, in particolare, sono distribuzioni temperate tutte le funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$);
2. le funzioni $f \in L^1_{loc}$ e **a crescita lenta**, ossia tali che $\exists M, q \geq 0 :$
 $|f(t)| \leq M(1 + |t|^q)$;
3. le funzioni $f \in L^1_{loc}$ e periodiche;
4. le distribuzioni $\delta(t)$, $\delta(t - a)$;
5. se $T \in \mathfrak{S}$ allora $DT \in \mathfrak{S}$ (in particolare quindi sono distribuzioni temperate $\delta^{(n)}(t)$, $\delta^{(n)}(t - a)$).

Si osservi che, in virtù di 2., sono distribuzioni temperate le funzioni costanti, i polinomi, le funzioni $\sin t$, $\cos t$.

Esercizio: stabilire quali delle seguenti funzioni in L^1_{loc} sono distribuzioni temperate

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^t u(t); & f_2(t) &= e^{-t} u(t) \\ f_3(t) &= e^t u(-t); & f_4(t) &= e^{-t} u(-t). \end{aligned}$$

Esercizio: Le funzioni a crescita lenta sono distribuzioni temperate, ma esistono anche distribuzioni temperate la cui crescita non è "lenta", in senso stretto. Ad esempio si provi che la funzione di L^1_{loc}

$$f(t) = e^t \cos(e^t)$$

è una distribuzione temperata. Suggerimento: si osservi che f è la derivata della funzione a crescita lenta $g(t) = \sin(e^t)$

2 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Sia $\varphi \in S$. Essendo φ a decrescenza rapida, si ha $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi φ ammette trasformata di Fourier. Sia pertanto Φ la sua trasformata, ossia $\Phi(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi\}$. Usando le proprietà della trasformata di Fourier in L^1 , è possibile provare che "lo spazio S è chiuso rispetto all'operatore trasformata di Fourier", ossia che vale il seguente:

Lemma - Sia $\varphi \in S$. Allora $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e, indicata con Φ la sua trasformata di Fourier, si ha $\Phi \in S$.

Si ha poi il seguente:

Teorema - Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ e sia F la sua trasformata di Fourier, ossia $F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}$. Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \varphi(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \Phi(\omega) d\omega, \quad \forall \varphi \in S$$

ossia

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle f, \Phi \rangle, \quad \forall \varphi \in S$$

o, equivalentemente,

$$\langle \mathcal{F}\{f\}, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle, \quad \forall \varphi \in S.$$

Tale Teorema suggerisce la seguente:

Definizione - Sia T una distribuzione temperata; si chiama *trasformata di Fourier di T* (nel senso delle distribuzioni) e si indica con $\mathcal{F}_D\{T\}$, la distribuzione definita da

$$\langle \mathcal{F}_D\{T\}, \varphi \rangle =_{\text{def}} \langle T, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle, \quad \forall \varphi \in S.$$

Tale definizione riconduce quindi il calcolo della trasformata $\mathcal{F}_D$ a quello della trasformata "classica" $\mathcal{F}$ (i.e. in L^1 o L^2).

Valgono le seguenti proprietà:

- La distribuzione $\mathcal{F}_D\{T\}$ è una distribuzione temperata.
- Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}_D\{f\} \equiv \mathcal{F}\{f\}$, ossia se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora la trasformata nel senso delle distribuzioni di f **coincide** con quella "classica".

La definizione precedente acquista quindi significato per gli elementi che non appartengono a $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$.

3 Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate "elementari"

La seguente tabella, provata a lezione, fornisce la trasformata di Fourier, nel senso delle distribuzioni, di alcune funzioni "elementari" a crescita lenta ($A \in \mathbb{R}$):

funzione	→	trasformata
1		$2\pi\delta(\omega)$
t		$2\pi j\delta'(\omega)$
t^n		$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$
e^{jAt}		$2\pi\delta(\omega - A), \quad A \in \mathbb{R}$
$\sin(At)$		$\pi j[\delta(\omega + A) - \delta(\omega - A)], \quad A \in \mathbb{R}$
$\cos(At)$		$\pi[\delta(\omega + A) + \delta(\omega - A)], \quad A \in \mathbb{R}$

Per la distribuzione $\delta(t)$ si ha poi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_D \{\delta(t)\} &= 1 \\ \mathcal{F}_D \{\delta(t-a)\} &= e^{-ja\omega}, \quad a \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Vale infine la proprietà

Se T è una distr. temperata, allora

$$\mathcal{F}_D \{DT\} = j\omega \mathcal{F}_D \{T\}. \quad (1)$$

Esercizio: Utilizzando i crochets, provare (1).

Esercizio: Calcolare la Trasformata di Fourier delle distribuzioni

$$\begin{aligned}T_1 &= \sin(t+1)\delta(t); \quad T_2 = t\delta'(t-1); \quad T_3 = D(e^{t-3}\delta(t)); \\ T_4 &= D(e^t\delta(t-3)); \quad T_5 = e^{t-3}\delta'(t); \quad T_6 = e^{5t}\delta'(t-1) + \delta'(t-2).\end{aligned}$$