ANALISI MATEMATICA 3

A.A. 2015-2016

ESERCIZI - parte n.4

April 22, 2016

1 Funzioni di Bessel e Gamma euleriana

Esercizio 1.1 Siano J_3 e J_8 due funzioni di Bessel. Calcolare l'espressione

$$J_3(5) + J_{-3}(5) + J_8(1) - J_{-8}(1).$$

Esercizio 1.2 Calcolare

$$\Gamma(3/2), \Gamma(5/2)$$

e

$$3\Gamma(4/3) - \Gamma(1/3) + \Gamma(1),$$

dove Γ è la funzione gamma euleriana.

Esercizio 1.3 Siano J_4, J_{-4}, J_3 e J_5 funzioni di Bessel. Provare che

$$J_4(4) + J_{-4}(4) - J_3(4) - J_5(4) = \lim_{x \rightarrow 0^+} J_4(x).$$

Esercizio 1.4 Si consideri la funzione Γ euleriana. Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + 1 &= 2\Gamma(1) \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + 2\Gamma(2) &= 1 \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \Gamma(3) &= 2\Gamma(1)\end{aligned}$$

Esercizio 1.5 Siano J_n e Y_n le funzioni di Bessel di prima e seconda specie. Si stabilisca se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta o errata.

- i) - la funzione Y_n è oscillante;
- ii) - Per ogni n intero positivo $\exists M_n > 0$ tale che $Y_n(x) > M_n$ se x è sufficientemente grande;
- iii) - Sia n non intero. le tre funzioni J_n, J_{-n}, Y_n sono linearmente indipendenti.

Esercizio 1.6 Siano $\{\lambda_k\}$ gli zeri di $J_4(x)$. Può' aversi $J_4'(\lambda_k) = 0$?

Esercizio 1.7 Siano J_n le funzioni di Bessel. Stabilire quale delle seguenti uguaglianze è corretta

$$2J_3'(2) - 3J_{-3}(2) = 3J_2(2)$$

$$2J_3'(2) - 3J_{-3}(2) = 2J_2(2)$$

$$2J_3'(2) - 3J_{-3}(2) = 2J_3(2)$$

Esercizio 1.8 Stabilire quale delle seguenti uguaglianze è corretta

$$J_{3/2}(\pi) = 0$$

$$J_{3/2}(\pi) = 1$$

$$J_{3/2}(\pi) = \pi^{-1}\sqrt{2}$$

$$J_{3/2}(\pi) = -\pi^2\sqrt{2}$$

(Suggerimento: usare la relazione di ricorrenza $2nJ_n(x) = xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x)$ per $n = 1/2$ e)

Esercizio 1.9 Stabilire quale delle seguenti uguaglianze è corretta

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^7 |J_7(x)| = 0$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^7 |J_7(x)| = +\infty$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^7 |J_7(x)| \text{ non esiste}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^7 |J_7(x)| = 7^{-1}\sqrt{2/\pi}.$$

Esercizio 1.10 Calcolare

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{J_{1/2}(x)}{x - \pi}$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{J_{-1/2}(x)}{2x - \pi}$$

Esercizio 1.11 Stabilire quale delle seguenti uguaglianze è corretta

1) $J'_0(x) + 2J_1(x) = 0$

2) $2J'_0(x) + J_1(x) = 0$

3) $J'_0(x) + J_1(x) = 0$

4) $J'_0(x) - J_1(x) = 0.$

Esercizio 1.12 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/3} J_{-1/2}(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-1/3} J_{-1/2}(x)$$

$$J'_{-1/2}(\pi)$$

$$J'_{1/2}(\pi/2)$$