

ANALISI MATEMATICA 3

A.A. 2015-2016 ESERCIZI - parte 1

March 11, 2016

1 Trasformata di Fourier

Notazione : indichiamo con $u(t)$ la funzione scalino, ossia

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 1.1 - Stabilire se le seguenti funzioni sono trasformabili secondo Fourier in L^1 e/o in L^2 .

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^{-t}; & f_2(t) &= e^{-t}u(t); & f_3(t) &= e^t; & f_4(t) &= e^t u(t); \\ f_5(t) &= e^{-|t|}; & f_6(t) &= e^t[u(t) - u(t-7)]; & f_7(t) &= \frac{1}{t}u(t); \\ f_8(t) &= \frac{1}{t}u(t-5); & f_9(t) &= \frac{1}{t^2}u(t); & f_{10}(t) &= \frac{1}{t^2}u(t-6); \\ f_{11}(t) &= \frac{1}{t-4}u(t-4); & f_{12}(t) &= \frac{1}{t-4}u(t-7); \\ f_{13}(t) &= \frac{1}{(t-4)^3}u(t-7); & f_{14}(t) &= \frac{1}{\sqrt{t}}[u(t) - u(t-4)]; \\ f_{15}(t) &= \frac{1}{\sqrt{t}}u(t-4). \end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.2 - A quale delle funzioni di cui all'Esercizio 1.1 è applicabile il Teorema di Plancherel?

ESERCIZIO 1.3 - Si considerino le funzioni

$$g_1(t) = 5t^2[u(t) - u(t - 9)]$$

$$g_2(t) = (\sin t)e^{-t^2}$$

$$h_1(t) = g_1(t - 4)e^{jt}$$

$$h_2(t) = g_2(t + \pi)e^{-3jt}.$$

Tali funzioni sono trasformabili secondo Fourier in L^1 ? E in L^2 ? In caso affermativo la trasformata di Fourier è continua? E' derivabile? Se sì, quante volte?

ESERCIZIO 1.4 - Quali delle seguenti funzioni razionali sono trasformate di Fourier in L^2 ?

$$F_1(\omega) = \frac{\omega + j}{\omega + 1}; \quad F_2(\omega) = \frac{\omega + j}{\omega^2 + 1};$$
$$F_3(\omega) = \frac{\omega + j}{\omega^2 - 1}; \quad F_4(\omega) = \frac{7\omega + 2}{\omega^2 + 9};$$
$$F_5(\omega) = \frac{\omega^2 + 7\omega + 2}{\omega^3 + 9}; \quad F_6(\omega) = \frac{\omega^2 + 7\omega + 2}{\omega^4 + 9}.$$

ESERCIZIO 1.5 - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, reale dispari e a supporto compatto. Sia F la sua trasformata di Fourier. Quanto vale $F(0)$?

ESERCIZIO 1.6 - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, e sia F la sua trasformata di Fourier. E' vera l'affermazione

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} F(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega F(\omega) ?$$

ESERCIZIO 1.7 - Le funzioni F_1 e F_3 definite nell'Esercizio 1.4 sono trasformate di Fourier di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$? E le funzioni $F_1(\omega)e^{j\omega}$, $F_3(\omega)e^{-j\omega}$, $F_1(\omega - 4)$, $F_3(\omega + 1)e^{\omega}$, $F_1(\omega)e^{-\omega}$?

2 Il caso razionale

ESERCIZIO 2.1 - Stabilire se le seguenti funzioni razionali ammettono trasformata di Fourier, specificando se in L^1 e/o in L^2 .

$$\begin{aligned}f_1(t) &= \frac{1}{t^2 + 5t + 8}; & f_2(t) &= \frac{t - 2}{t^2 + 5t + 8}; \\f_3(t) &= \frac{2}{3 + 2t^2}; & f_4(t) &= \frac{t + 1}{2t^2 + 3}; \\f_5(t) &= \frac{t + 5}{t^2 + 2t - 1}; & f_6(t) &= \frac{5}{t^2 - 5t - 4}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2.2 - Per le funzioni di cui all'Esercizio 2.1. che ammettono trasformata di Fourier, calcolarne la trasformata e specificare se tale trasformata $F \in L^1$ oppure $\in L^2$. Calcolare poi la trasformata di Fourier delle funzioni

$$\begin{aligned}g_i(t) &= f_i(t)e^{5jt} \\h_i(t) &= f_i(t - 9),\end{aligned}$$

dove f_i sono le funzioni di cui all'Esercizio 2.1 che ammettono trasformata di Fourier.

ESERCIZIO 2.3 - Stabilire se le seguenti funzioni sono trasformate di Fourier in L^2 oppure no. In caso affermativo, calcolare l'antitrasformata di Fourier.

$$\begin{aligned}F_1(\omega) &= \frac{2\omega^3}{\omega^2 + j}; & F_2(\omega) &= \frac{2\omega}{\omega^2 - j}; \\F_3(\omega) &= \frac{2j}{\omega^2 + 4}; & F_4(\omega) &= \frac{2\omega^2}{\omega^2 + \omega + 6}; \\F_5(\omega) &= \frac{1}{\omega + j}; & F_6(\omega) &= \frac{\omega - 4}{(\omega - 4)^2 + 6}; \\F_7(\omega) &= \frac{1}{\omega^2 + \omega + 6}; & F_8(\omega) &= \frac{1}{\omega^2 + j}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2.4 - Calcolare l'antitrasformata di Fourier di

$$G_i(\omega) = F_i(\omega)e^{3j\omega},$$

dove F_i sono le funzioni di cui all'Esercizio 2.3 che appartengono a L^2 .

ESERCIZIO 2.5 - A quale delle seguenti funzioni è applicabile il Lemma di Jordan?

$$F_1(s) = \frac{5s^2 + 4}{s^2 + 16}; F_2(s) = \frac{5s^2 + 4}{s^2 - 16}; F_3(s) = \frac{5s + 4}{s^2 + 16};$$
$$F_4(s) = \frac{1 + s}{|s|^2}; F_5(s) = \frac{1}{|s|}; F_6(s) = \frac{js - 1}{s^2 + 4j}.$$

RISPOSTE:

Esercizio 1.1 : sono trasformabili in L^1 e in L^2 le funzioni $f_2, f_5, f_6, f_{10}, f_{13}$. Sono trasformabili in L^2 e non in L^1 le funzioni f_8, f_{12} . E' trasformabile in L^1 e non in L^2 la funzione f_{14} . Le altre funzioni non sono trasformabili né in L^1 né in L^2 .

Esercizio 1.2 : E' applicabile alle funzioni trasformabili in L^2 , ossia a $f_2, f_5, f_6, f_8, f_{10}, f_{12}, f_{13}$.

Esercizio 1.3 : tutte le funzioni considerate ammettono trasformata sia in L^1 che in L^2 . Poiché sono trasformabili in L^1 , le trasformate sono funzioni continue. Applicando la proprietà della "moltiplicazione per t " e i suoi corollari, si ha che tutte le trasformate sono di classe C^∞ .

Esercizio 1.4 : sono trasformate in L^2 le funzioni F_2, F_4 e F_6 . Non lo sono le altre.

Esercizio 1.7: nessuna delle funzioni indicate è trasformata di Fourier di $f \in L^1$.

Esercizio 2.1: f_1, f_3 ammettono trasf. in L^1 e L^2 ; f_2 e f_4 soltanto in L^2 ; f_5 e f_6 non ammettono trasf. di Fourier

Esercizio 2.5: soltanto F_3 e F_6