ANALISI MATEMATICA 3
A.A. 2015-2016 ESERCIZI parte seconda

March 18, 2016

1 Trasformata Laplace

Esercizio 1.1 Utilizzando la formula di Bromwich-Mellin e la teoria dei residui, calcolare le antitrasformate di Laplace delle seguenti funzioni razionali:

$$F_1(s) = \frac{1}{s^2+4s+5};\ F_2(s) = \frac{1}{s^2+4s+3};$$
$$F_3(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+s};\ F_4(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-2)(s^2+4)};$$
$$F_5(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s+2)};\qquad F_6(s) = \frac{s^2+2s-1}{s^3-2s^2+2s-1}.$$

Esercizio 1.2 Quale o quali delle seguenti funzioni è la trasformata di Laplace di una distribuzione?

$$G_1(s) = \frac{s^2+4}{s^2-4};\ G_2(s) = \frac{s^2+4}{s^2-4s};\ G_3(s) = \frac{s+4}{s^2-4};$$
$$G_4(s) = \frac{s^2+4}{s^3-4};\ G_5(s) = \frac{s^3+4s}{s^2-4};G_6(s) = \frac{s^4+4}{s^2-4s};$$
$$G_7(s) = \frac{s}{s^4-4};\ G_8(s) = \frac{4}{s^2-4};\ G_9(s) = \frac{s^4+4s^2}{s^3-4}.$$

Esercizio 1.3 - Si considerino le seguenti funzioni. Quale o quali ammette trasformata di Laplace in senso classico? (Si assuma che tali funzioni sono nulle per $t < 0$). In caso affermativo, si determini l'ascissa di convergenza α_f.

$$f_1(t) = e^{-t^2}; \qquad f_2(t) = t^7 + 14t^6;$$
$$f_3(t) = t\cos t; \qquad f_4(t) = e^t \cos t^2;$$
$$f_5(t) = e^{t^2}\cos t; \qquad f_6(t) = t^{-4}.$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 21 & \text{se } t > 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$
$$g_2(t) = \begin{cases} e^t \sin t & \text{se } t > 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$
$$g_3(t) = \begin{cases} t^{-4} & \text{se } t > 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Soluzioni Esercizio 1.1 Per $t > 0$ si ha:

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= e^{-2t}\sin t \\
f_2(t) &= \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t}) \\
f_3(t) &= 1 - e^{-t} - te^{-t} \\
f_4(t) &= \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t \\
f_5(t) &= \frac{1}{9}(e^{-2t} - e^t + 3te^t) \\
f_6(t) &= 2e^t + e^{t/2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).
\end{aligned}$$

(Tali funzioni sono inoltre nulle per $t < 0$).