ANALISI MATEMATICA 3
A.A. 2015-2016
ESERCIZI parte 3 e fac-simile compito

April 6, 2016

1 Equazioni differenziali lineari

Esercizio 1.1 Usando la trasformata di Laplace, determinare la soluzione dei seguenti problemi ai dati iniziali (per $t > 0$)

a) $\begin{cases} y'' + 7y' + 12y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y'' - 8y' - 9y = 0 \\ y(0) = 4, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y'' + 6y' + 8y = 0 \\ y(0) + y'(0) = 0, \quad y(0) - y'(0) = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y'' + 5y' = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

Esercizio 1.2 Stabilire quale delle seguenti equazioni è oscillante e quale nonoscillante.

1) $y'' - 7y' + (x^2 - 1)e^{7x} y = 0$
2) $y'' + 7xy' + (1 - x^2)y = 0$
3) $y'' + \frac{1}{x} y' + 4y = 0$
4) $y'' + 5xy' - 4xy = 0$
5) $y'' + \frac{3-x}{x+3} y = 0$
6) $y'' + \frac{x^3 - 3x - 1}{x(x^2+9)} y = 0$

Risposta: sono oscillanti le equazioni 1), 3) e 6); nonoscillanti le altre.

Esercizio 1.3 Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \tag{1}$$

dove le funzioni a e b sono continue in $[0, \infty)$.

1) La funzione $tg\ x$ puo' essere soluzione di (1)?

2) Le funzioni $y_1(x) = 75x - 1$, $y_2(x) = x \sin x$ possono essere contemporaneamente soluzioni di (1)?

Esercizio 1.4 Stabilire quale delle seguenti equazioni è oscillante e quale nonoscillante

$$\begin{array}{ll} 1) & y'' + 4xy' + e^{-4x^2}y = 0 \\ 2) & y'' + (3 - \sin x)y = 0 \\ 3) & y'' - 2y' + 6e^{4x}y = 0 \end{array}$$

Risposta: sono oscillanti le equazioni 2) e 3); nonoscillanti la 1).

Esercizio 1.5 Studiare, al variare del parametro reale λ, l'oscillazione dell'equazione

$$y'' + 5\lambda e^x y = 0.$$

Esercizio 1.6 Esiste un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine del tipo

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

con a e b funzioni continue per ogni x reale avente per soluzione $y(x) = (x - 15)^2$?

Esercizio 1.7 La funzione

$$y(x) = \frac{8 + x^3}{15 - x^3}$$

può essere soluzione di un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine del tipo

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

con a e b funzioni continue in $[0, \infty)$?

Esercizio 1.8 Sia $u(x) = (x^4 + 4x + 9)e^{4x}$ una soluzione di

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{*}$$

con a e b funzioni continue in $[0, \infty)$. La funzione $v(x) = \sin(x^4 + 4x + 9)$ può essere un'altra soluzione di (*)?

n. 101

COGNOME NOME

Risposte											
Domande	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Scrivere il numero della risposta sopra alla corrispondente domanda

• *Domanda* 1 Sia $f(t) = 2/(3+2t^2)$ e sia F la sua trasf. di Fourier. Allora
1) $F(-1) = j\sqrt{2/3}e^{-\sqrt{3}/\sqrt{2}}$
2) $F(-1) = \pi\sqrt{2/3}e^{\sqrt{3}/\sqrt{2}}$
3) $F(-1) = \pi\sqrt{2/3}e^{-\sqrt{3}/\sqrt{2}}$
4) $F(-1) = \pi j\sqrt{2/3}e^{\sqrt{3}/\sqrt{2}}$

• *Domanda* 2 Siano g e $tg(t-1) \in L^1(R)$. Sia G la trasf. di Fourier di g. Allora la trasf. di Fourier di $tg(t-1)$ è:
1) $jG'(\omega)e^{-j\omega} + G(\omega)e^{-j\omega}$
2) $jG(\omega)e^{-j\omega}$
3) $jG'(\omega)e^{-j\omega}$
4) $G'(\omega)e^{-j\omega} + jG(\omega)e^{-j\omega}$

• *Domanda* 3 Calcolare per $t > 0$ l'antitrasf. di Laplace di

$$\frac{5s}{s^2+7s+6}$$

1) $6e^{6t}$
2) $-e^{-t}$
3) $e^{-t} + 6e^{t}$
4) $-e^{-t} + 6e^{-6t}$

• *Domanda* 4 Quale o quali delle seguenti equazioni è oscillante?

$$A)\ \ y'' + 5y' = 0;\ \ B) y'' + 7y = 0$$
$$C) y'' - 5y' = 0;\ D) y'' - 5y = 0$$

1) nessuna delle altre risposte è corretta.
2) $B)$
3) $A)$ e $B)$
4) $B)$ e $C)$

• *Domanda* 5 Sia G la trasform. di Fourier di $tf(t)$, dove f e' definita nella domanda contrassegnata con (*). Allora
1) $G \in L^2(R)$
2) G non è derivabile in R
3) G non è continua in R
4) G è dispari

• *Domanda* 6 Calcolare per $t < 0$ l'antitrasf. di Fourier di

$$F(\omega) = \frac{3\omega}{(\omega^2+4)(\omega+j)}$$

1) $-e^{t} + (3/2)e^{2t}$
2) $-e^{-t} - (3/2)e^{2t}$
3) $e^{t} - (3/2)e^{-2t}$
4) $e^{-t} - (3/2)e^{-2t}$

• *Domanda* 7 Quale tra le seguenti funzioni ha trasf. di Fourier di classe $C^2(R)$?

$$f_1(t) = \frac{3}{(t^2-3jt-2)}, f_2(t) = \frac{3}{(t-j)^2(t+2j)},$$
$$f_3(t) = \frac{3}{(t+j)^2(t+2j)^2}$$

1) nessuna
2) f_2 e f_3
3) f_1
4) f_3

• *Domanda* 8 (*) Sia

$$f(t) = \frac{\sin t}{t^4+4t^2+6}$$

e sia F la sua trasf. di Fourier. Allora
1) $F(0+) \neq F(0-)$
2) $F(0) = 0$
3) $F(0) + F(+\infty) = +\infty$
4) $F(0) + F(+\infty) = 1$

• *Domanda* 9 La funzione $f(x) = x\sin x$ puo' essere soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

con a e b funzioni continue in $[0, +\infty)$?
1) No, perche' f è persistente.
2) Sì, scegliendo a e b in modo opportuno
3) No, perche' ha uno zero doppio in $x = 0$.
4) No, perche' f è oscillante.

S O L U Z I O N E

Risposte	3	1	4	2	1	1	4	2	3
Domande	1	2	3	4	5	6	7	8	9