# ANALISI MATEMATICA 3
# A.A. 2004-2005
ESERCIZI parte 1

November 22, 2004

## 1 Funzioni Reali Positive

**ESERCIZIO 1.1** - Stabilire se le seguenti funzioni razionali sono RP oppure no.

$$F_1(s) = \frac{s^4+10s^2+3}{s^3+s}; \; F_2(s) = \frac{3s^2+s+18}{s^2+36s};$$
$$F_3(s) = \frac{4s+6}{s^2+s}; \; F_4(s) = \frac{s^4+s^2+3}{s^3+s};$$
$$F_5(s) = \frac{s^3+4s^2-4s-1}{s^3-s^2+s-1}; \; F_6(s) = \frac{3s+5}{s^2+4s+3}.$$

Risposte : sono RP le funzioni $F_1, F_2, F_5, F_6$. Non lo sono le altre.

**ESERCIZIO 1.2 -** Usando il test delle funzioni dispari, stabilire quali delle seguenti funzioni è RP.

$$F_1(s) = \frac{s^5+10s^3+3s}{s^4+s^2}; \; F_2(s) = \frac{s^3+6s}{s^2+4};$$
$$F_3(s) = \frac{s^3+6s}{s^2+8}; \; F_4(s) = \frac{s^6-1}{s^5-s}; \; F_5(s) = \frac{s^6+1}{s^5+s}.$$

Risposte: lo è soltanto la funzione $F_2$

**ESERCIZIO 1.3 -** Per le funzioni $F_i$, con $i \neq 2$, di cui all'Esercizio 1.2, quale o quali delle condizioni per la positività nel test delle "4 condizioni" non sono verificate?

**ESERCIZIO 1.4** - Determinare per quali valori del parametro reale $\lambda$ sono RP le funzioni

$$F_1(s) = \frac{s^4 + \lambda^2 s^2 + 3}{s^3 + s}; F_2(s) = \frac{s^2 - \lambda s + 6}{\lambda^2 s^2 + 4s};$$
$$F_3(s) = \frac{4s + \lambda + 1}{s^2 + s}; F_4(s) = \frac{s^2 + 4}{s^3 + \lambda^2 s}; F_5(s) = \frac{s + \lambda - 1}{s^2 + s}.$$

Risposte:

$$F_1 : |\lambda| \geq 2;$$
$$F_2 : \lambda \in [-2/3, 0]$$
$$F_3 : \lambda \in [-1, 3]$$
$$F_4 : |\lambda| \geq 2$$
$$F_5 : \lambda \in [1, 2]$$

**ESERCIZIO 1.5** - Dopo aver verificato la positività delle seguenti funzioni, si determinino le reti RLC che hanno tali funzioni come impedenza e ammettenza.

$$F_1(s) = \frac{s^3 - 3s^2 + 4s - 12}{s^4 - 3s^3 + 9s^2 - 27s}$$
$$F_2(s) = \frac{s+1}{s+4}; F_3(s) = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 8};$$
$$F_4(s) = 6s + 8 + \frac{15}{s+5}; \; F_5(s) = \frac{s^3 + 4s}{s^2 + 2}.$$

(Suggerimento: numeratore e denominatore di $F_1$ si annullano in $s = 3$)

# ANALISI MATEMATICA 3
# A.A. 2004-2005
## ESERCIZI parte 1- (versione modificata)

December 2, 2004

**Rispetto al file Esercizi 1, è stata modificata la funzione $F_1$ nell'Esercizio 1.2**

## 1 Funzioni Reali Positive

**ESERCIZIO 1.1** - Stabilire se le seguenti funzioni razionali sono RP oppure no.

$$F_1(s) = \frac{s^4 + 10s^2 + 3}{s^3 + s};\ F_2(s) = \frac{3s^2 + s + 18}{s^2 + 36s};$$
$$F_3(s) = \frac{4s + 6}{s^2 + s};\ F_4(s) = \frac{s^4 + s^2 + 3}{s^3 + s};$$
$$F_5(s) = \frac{s^3 + 4s^2 - 4s - 1}{s^3 - s^2 + s - 1};\ F_6(s) = \frac{3s + 5}{s^2 + 4s + 3}.$$

Risposte : sono RP le funzioni $F_1, F_2, F_5, F_6$. Non lo sono le altre.

**ESERCIZIO 1.2 -** Usando il test delle funzioni dispari, stabilire quali delle seguenti funzioni è RP.

$$F_1(s) = \frac{s^5 + 10s^3 + 3s}{s^4 + s^2 + 10};\ F_2(s) = \frac{s^3 + 6s}{s^2 + 4};$$
$$F_3(s) = \frac{s^3 + 6s}{s^2 + 8};\ F_4(s) = \frac{s^6 - 1}{s^5 - s};\ F_5(s) = \frac{s^6 + 1}{s^5 + s}.$$

Risposte: lo è soltanto la funzione $F_2$

**ESERCIZIO 1.3 -** Per le funzioni $F_i$, con $i \neq 2$, di cui all'Esercizio 1.2, quale o quali delle condizioni per la positività nel test delle "4 condizioni" non sono verificate?

**ESERCIZIO 1.4** - Determinare per quali valori del parametro reale $\lambda$ sono RP le funzioni

$$F_1(s) = \frac{s^4 + \lambda^2 s^2 + 3}{s^3 + s}; F_2(s) = \frac{s^2 - \lambda s + 6}{\lambda^2 s^2 + 4s};$$
$$F_3(s) = \frac{4s + \lambda + 1}{s^2 + s}; F_4(s) = \frac{s^2 + 4}{s^3 + \lambda^2 s}; F_5(s) = \frac{s + \lambda - 1}{s^2 + s}.$$

Risposte:

$$F_1 : |\lambda| \geq 2;$$
$$F_2 : \lambda \in [-2/3, 0]$$
$$F_3 : \lambda \in [-1, 3]$$
$$F_4 : |\lambda| \geq 2$$
$$F_5 : \lambda \in [1, 2]$$

**ESERCIZIO 1.5** - Dopo aver verificato la positività delle seguenti funzioni, si determinino le reti RLC che hanno tali funzioni come impedenza e ammettenza.

$$F_1(s) = \frac{s^3 - 3s^2 + 4s - 12}{s^4 - 3s^3 + 9s^2 - 27s}$$
$$F_2(s) = \frac{s+1}{s+4}; F_3(s) = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 8};$$
$$F_4(s) = 6s + 8 + \frac{15}{s+5};\ F_5(s) = \frac{s^3 + 4s}{s^2 + 2}.$$

(Suggerimento: numeratore e denominatore di $F_1$ si annullano in $s = 3$)

# ANALISI MATEMATICA 3
# A.A. 2004-2005
ESERCIZI parte 2

December 2, 2004

## 1 Funzioni Reali Positive

**ESERCIZIO 1.1** - Usando il criterio di Talbot, stabilire se le seguenti funzioni razionali sono RP oppure no.

$$F_1(s) = \frac{36s^3 + 48s^2 + 21s + 3}{36s^3 + 42s^2 + 16s + 2};$$
$$F_2(s) = \frac{6s^3 + s^2 + 4s + 1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 1};$$
$$F_3(s) = \frac{2s^3 + 2s^2 + 4s + 1}{s^3 + s^2 + 2s + 1};$$
$$F_4(s) = \frac{s^4 + s^2 + 3}{s^3 + s};$$
$$F_5(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 4s + 1}{2s^3 + s^2 + 4s + 1}.$$

Risposte : sono RP le funzioni $F_1, F_3, F_5$. Non lo sono le altre.

## 2 Trasformata di Fourier

Notazione : indichiamo con $u(t)$ la funzione scalino, ossia

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

**ESERCIZIO 2.1 -** Stabilire quali delle seguenti funzioni è trasfomabile secondo Fourier in $L^1$ e/o in $L^2$.

$$
\begin{aligned}
&f_1(t) = e^{-t};\ f_2(t) = e^{-t}u(t);\ f_3(t) = e^{t};\ f_4(t) = e^{t}u(t);\\
&f_5(t) = e^{-|t|};\ f_6(t) = e^{t}[u(t) - u(t-7)];\ f_7(t) = \frac{1}{t}u(t);\\
&f_8(t) = \frac{1}{t}u(t-5);\ f_9(t) = \frac{1}{t^2}u(t);\ f_{10}(t) = \frac{1}{t^2}u(t-6);\\
&f_{11}(t) = \frac{1}{t-4}u(t-4);\ f_{12}(t) = \frac{1}{t-4}u(t-7);\\
&f_{13}(t) = \frac{1}{(t-4)^3}u(t-7);\ f_{14}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}[u(t) - u(t-4)];\\
&f_{15}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}u(t-4).
\end{aligned}
$$

**ESERCIZIO 2.2 -** A quale delle funzioni di cui all'Esercizio 2.1 è applicabile il Teorema di Plancherel?

**ESERCIZIO 2.3** - Si considerino le funzioni

$$
\begin{aligned}
g_1(t) &= 5t^2[u(t) - u(t-9)]\\
g_2(t) &= (\sin t)e^{-t^2}\\
h_1(t) &= g_1(t-4)e^{jt}\\
h_2(t) &= g_2(t+\pi)e^{-3jt}.
\end{aligned}
$$

Tali funzioni ammettono trasformata di Fourier in $L^1$? E in $L^2$ ? In caso affermativo la trasformata di Fourier è continua ? E' derivabile? Se sì, quante volte?

**ESERCIZIO 2.4** - Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$
\begin{aligned}
&f_1(t) = \frac{1}{t^2+5t+8};\ f_2(t) = \frac{t-2}{t^2+5t+8};\\
&f_3(t) = \frac{2}{3+2t^2};\ f_4(t) = \frac{t+1}{2t^2+3};\\
&f_5(s) = \frac{t+5}{t^2+2t+j};\ f_6(t) = \frac{5}{t^2+2jt+j}.
\end{aligned}
$$

**ESERCIZIO 2.5** - Calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni

$$g_i(t) = f_i(t)e^{5jt}$$
$$h_i(t) = f_i(t-9)$$

dove le funzioni $f_i$ sono definite nell'Esercizio 2.4.

**ESERCIZIO 2.5** - Calcolare l'antitrasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$F_1(\omega) = \frac{2\omega}{\omega^2 + j}; \; F_2(\omega) = \frac{2\omega}{\omega^2 - j};$$
$$F_3(\omega) = \frac{2j}{\omega^2 + 4}; \; F_4(\omega) = \frac{2\omega}{\omega^2 + \omega + 6};$$
$$F_5(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}; \; F_6(\omega) = \frac{\omega - 4}{(\omega - 4)^2 + 6}.$$

**ESERCIZIO 2.6** - Calcolare l'antitrasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$G_i(\omega) = F_i(\omega)e^{3j\omega},$$

dove le funzioni $F_i$ sono definite nell'Esercizio 2.5.

**ESERCIZIO 2.7** - Quali delle seguenti funzioni sono trasformate di Fourier in $L^2$ ?

$$F_1(\omega) = \frac{\omega + j}{\omega + 1}; \; F_2(\omega) = \frac{\omega + j}{\omega^2 + 1};$$
$$F_3(\omega) = \frac{\omega + j}{\omega^2 - 1}; \; F_4(\omega) = \frac{\omega^2 + 7\omega + 2}{\omega^2 + 9};$$
$$F_5(\omega) = \frac{\omega^2 + 7\omega + 2}{\omega^3 + 9}; \; F_4(\omega) = \frac{\omega^2 + 7\omega + 2}{\omega^4 + 9}.$$

**RISPOSTE:**

Esercizio 2.1 : sono trasformabili in $L^1$ e in $L^2$ le funzioni $f_2$, $f_5$, $f_6$, $f_{10}$, $f_{13}$. Sono trasformabili in $L^2$ e non in $L^1$ le funzioni $f_8$, $f_{12}$. E' trasformabile in $L^1$ e non in $L^2$ la funzione $f_{14}$. Le altre funzioni non sono trasformabili né in $L^1$ né in $L^2$.

Esercizio 2.2 : E' applicabile alle funzioni trasformabili in $L^2$, ossia a $f_2$, $f_5$, $f_6$, $f_8$, $f_{10}$, $f_{12}$, $f_{13}$.

Esercizio 2.3 : tutte le funzioni considerate ammettono trasformata sia in $L^1$ che in $L^2$. Poiché sono trasformabili in $L^1$, le trasformate sono funzioni continue. Applicando la proprietà della "moltiplicazione per $t$" e i suoi corollari, si ha che tutte le trasformate sono di classe $C^\infty$.

Esercizio 2.7 : sono trasformate in $L^2$ le funzioni $F_2$ e $F_4$. Non lo sono le altre.

# ANALISI MATEMATICA 3
# A.A. 2004-2005
ESERCIZI parte 3

December 15, 2004

## 1 Alcuni esercizi "teorici"

Si risponda alle seguenti domande, **giustificando la risposta**. Questi esercizi saranno svolti nella lezione di venerdì 17 dicembre

**ESERCIZIO 1.1** - Sia $F$ reale, razionale propria reale positiva e $F(0) = 0$. La funzione

$$G(s) = F(s - 24)$$

è RP ?

**ESERCIZIO 2.1** - Sia $F$ reale, razionale propria e sia $F(1+j) = -4+j$. Allora $F$ è RP?

**ESERCIZIO 3.1** - A quale delle seguenti funzioni è applicabile il Lemma di Jordan?

$$F_1(s) = \frac{5s^2+4}{s^2+16}; F_2(s) = \frac{5s^2+4}{s^2+16}e^{-s}; F_3(s) = \frac{5s+4}{s^2+16}.$$

**ESERCIZIO 4.1 -** Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, reale dispari e a supporto compatto. Sia $F$ la sua trasformata di Fourier. Quanto vale $F(0)$ ?

**ESERCIZIO 5.1 -** Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, e sia $F$ la sua trasformata di Fourier. E' vera l'affermazione

$$\lim_{\omega \to +\infty} F(\omega) = \lim_{\omega \to 0} \omega F(\omega) \ ?$$

# ANALISI MATEMATICA 3
# A.A. 2004-2005
ESERCIZI parte 4

January 3, 2005

## 1 Distribuzioni

**ESERCIZIO 1.1** - Calcolare la derivata, nel senso delle distribuzioni, di:

$$\begin{array}{lll} 3e^{5t}\delta(t-1); & u(t)-u(t-8); & 3e^{5t}+e^{-4t}\delta(t); \\ (t^2+2t-6)\delta(t); & u(t)+5t\delta(t); & (t^2+2t)\delta(t+1); \\ \sin t+\delta(t); & (\sin t)\delta(t-5); & (\sin t)\delta(t). \end{array}$$

**ESERCIZIO 1.2** - Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$$\begin{aligned} &\sin(2t)\cdot\delta'(t)=0 \\ &\sin(2t)\cdot\delta'(t)=-2\delta(t) \\ &\sin(2t)\cdot\delta'(t)=\delta'(t) \\ &\sin(2t)\cdot\delta'(t)=u(t)+2\delta(t). \end{aligned}$$

**ESERCIZIO 1.3** - Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$$\begin{aligned} &5t\delta'(t)+\delta(t)=\delta'(t) \\ &5t\delta'(t)+\delta(t)=-4\delta(t) \\ &5t\delta'(t)+\delta(t)=\delta'(t)+5u(t). \end{aligned}$$

**ESERCIZIO 1.4 -** Date le funzioni

$$f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{se } t \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in (1,2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

calcolare $Df$, $Dg$, $D[e^t f(t)]$, $D[e^{-t}g(t)]$, $e^t Df$, $e^{-t}Dg$ [Il simbolo $D$ indica la derivata nel senso delle distribuzioni].

**ESERCIZIO 1.5 -** Quale delle seguenti distribuzioni è una distribuzione temperata?

$$\begin{array}{lll} 2t+\sin 5t; & t\delta(t)+t\delta(t-1); & t+e^t; \\ t+e^t\delta(t); & e^{-t}\delta(t-1); & e^{-t}+\delta(t); \\ \cos t+\delta(t+4); & 1+\cos 2t; & e^{-t}+\sin t; \\ (1+\sin 3t)\delta(t-2); & 1+7t^2; & (1+7t^2)\delta(t). \end{array}$$

**ESERCIZIO 1.6 -** Calcolare la trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni) delle distribuzioni di cui all'Esercizio 1.5 che sono temperate.

Calcolare poi la trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni) della derivata (nel senso delle distribuzioni).

**ESERCIZIO 1.7 -** Data la funzione

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{se } t \in (0,4) \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si calcoli la trasformata di Fourier di $Df$, di $tDf$, di $(t-4)Df$.

**ESERCIZIO 1.8 -** Quale delle seguenti è una distribuzione?

$$\begin{array}{lll} (t+6)\delta(t); & e^t+e^{-t}\delta(t); & (\log t)\delta'(t); \\ \delta^2(t); & (t-4)^{-2}\delta(t+2); & (\sin 5t)\delta(t); \\ (\sin 5t)\delta'(t); & e^{-5t}-5; & (e^{5t}+5)\delta(t). \end{array}$$

Quale delle precedenti è una distribuzione temperata? Per quelle che lo sono si calcoli la trasformata di Fourier e la trasformata di Fourier della derivata (nel senso delle distribuzioni).