

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2004-2005

Traccia delle lezioni

November 27, 2004

1 Lezione del 22 novembre 2004

Dal Volume M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999:

Funzioni Reali Positive:
Introduzione Cap. 2.1;
Definizioni Cap. 2.2;
Funzioni razionali reali Cap. 2.3;
Test delle 4 condizioni Cap.2.4

2 Lezione del 24 novembre 2004

Dal Volume M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999:

Funzioni Reali Positive:
Positività: condizioni necessarie (Cap. 2.5 - Proposizione 2.4 ed esempi)
Il caso dispari: generalità (Cap. 2.10)
Caso dispari: la positività (Cap. 2.11 - Teorema 2.7)
Reti Elettriche e funzioni R.P. (Cap. 2.15)

3 Lezione del 25 novembre 2004

Dal Volume M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999:

Il teorema di Bayard (Cap. 2.17)
Il criterio di Talbot (Cap. 2.7)
Il test di Hurwitz (Cap. 2.8)
Esempi (Cap. 2.9).

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2004-2005

Traccia delle lezioni

November 29, 2004

1 Lezione del 29 novembre 2004

1.1 Richiami sul concetto di integrale improprio

Sia f una funzione reale di variabile reale, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile in ogni intervallo limitato e chiuso dell'asse reale. Se, **comunque** siano scelti $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, esiste finito il limite

$$\lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

e tale limite è indipendente da a, b , allora si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx =_{def} \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

e diremo che f è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, o, equivalentemente che l'integrale di f , esteso a $\mathbb{R}$, converge. In caso contrario diremo che f non è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ o semplicemente che f non è integrabile in $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, che l'integrale di f , esteso a $\mathbb{R}$, non converge.

Si chiama poi *valore principale dell'integrale improprio* (in $\mathbb{R}$), e si indica con

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

il limite

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =_{def} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L}^{+L} f(x)dx. \quad (2)$$

La relazione tra le due definizioni (1), (2) è ovviamente la seguente: se f è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, allora il valore principale dell'integrale improprio esiste finito e coincide con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, ossia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \implies v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M.$$

Ovviamente NON vale il viceversa, ossia il valore principale dell'integrale improprio può essere finito, ma l'integrale (1) può non convergere, i.e.

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \not\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M.$$

Ad esempio per la funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

si ha

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} dx = 0$$

in quanto la funzione è dispari, ma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ovviamente non converge (f è illimitata!).

1.2 Trasformata di Fourier in L^1

1.2.1 Definizione

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile **reale** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Tale funzione si dice *sommabile*, e si scrive $f \in L^1(\mathbb{R})$, se $|f|$ è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, ossia se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty.$$

Ciò posto si chiama *Trasformata di Fourier* di f la funzione F definita da

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (3)$$

dove ω è un numero reale fissato.

- La definizione (3) è lecita, nel senso che l'integrale in (3) converge per ogni ω reale.
- Utilizzando le formule di Eulero si ha poi

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt}_{(*)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt}_{(+)}$$

$(*)$ si chiama *Trasformata coseno di Fourier* e $(+)$ *Trasformata seno di Fourier*.

- Formula della antitrasformata : vale il seguente teorema

Teorema Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si supponga inoltre che f sia sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso $[-L, L]$. Ciò premesso si ha

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

1.3 Proprietà della funzione trasformata $F(\omega)$

Indichiamo con $\mathfrak{F}$ l'operatore che associa a $f(\in L^1(\mathbb{R}))$ la sua trasformata di Fourier F , ossia $\mathfrak{F}\{f\} = F$. Ciò premesso si ha:

Teorema. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; allora la sua trasformata F è una funzione continua e infinitesima per $|\omega| \rightarrow \infty$.

Corollario. La trasformata di Fourier F di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ è una funzione limitata in $\mathbb{R}$.

Ad esempio non sono trasf. di Fourier (di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$!) le funzioni

$$F_1(\omega) = \frac{\omega^2 + 12}{\omega^2 + 4}; F_2(\omega) = \frac{\omega + 12}{\omega^2 - 4}.$$

La trasformata di Fourier F di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$ può non essere derivabile. Esempi in tal senso saranno visti nelle prossime lezioni. Se, all'ipotesi $f \in L^1(\mathbb{R})$ aggiungiamo anche $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$, allora la risposta è affermativa, come segue subito dal seguente risultato.

Teorema Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$; allora la trasformata di Fourier F di f è derivabile e si ha:

$$\mathfrak{F}\{tf(t)\} = j \frac{d}{d\omega} F(\omega).$$

In particolare:

Corollario Sia $t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ per $n = 0, 1, \dots, N$. Allora la trasformata di Fourier F di f è una funzione di classe $C^N(\mathbb{R})$.

Corollario Sia f a supporto compatto (i.e. esiste un intervallo compatto $[a, b]$ tale che $f(t) = 0$ se $t \notin [a, b]$) e sia f assolutamente integrabile in $[a, b]$. Allora f è trasformabile secondo Fourier e la sua trasformata F è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

1.4 Esempi

▲ **Impulso Rettangolare** - Sia

$$f(t) = \begin{cases} M & \text{se } |t| \leq L \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F(\omega) = 2ML \text{sinc}(\omega L) = \begin{cases} 2M\omega^{-1} \sin(\omega L) & \text{se } \omega \neq 0 \\ 2ML & \text{se } \omega = 0 \end{cases}.$$

▲ **Impulso Triangolare** - Sia

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{se } -1 \leq t < 0 \\ 1-t & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F(\omega) = \frac{2(1 - \cos \omega)}{\omega^2} \text{ per } \omega \neq 0, F(0) = 1.$$

▲ **Impulso esponenziale** - Sia

$$f(t) = \exp(-|t|);$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}.$$

▲ **Impulso gaussiano** - Sia

$$f(t) = \exp(-t^2/2);$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F(\omega) = \sqrt{2\pi} \exp((- \omega^2/2).$$

1.5 Derivazione

Teorema (Derivazione) Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R}), f' \in L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$\mathfrak{F}\{f'\} = j\omega \mathfrak{F}\{f\}.$$

Corollario Sia $f \in C^N(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R}), f' \in L^1(\mathbb{R}), \dots, f^{(N)} \in L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$\mathfrak{F}\{f^{(N)}\} = (j\omega)^N \mathfrak{F}\{f\}.$$

In particolare, se $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R}), f' \in L^1(\mathbb{R}), f'' \in L^1(\mathbb{R})$, allora

$$\mathfrak{F}\{f''\} = -\omega^2 \mathfrak{F}\{f\}.$$

Si osservi che l'ipotesi " $f \in C^1(\mathbb{R})$ " nel precedente Teorema non può essere tralasciata, come mette in luce l'esempio, visto prima, dell'impulso rettangolare.

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2004-2005

Traccia delle lezioni

December 3, 2004

1 Lezione del 2 dicembre 2004

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e sia F la sua trasformata di Fourier. Allora:

1. Se f è pari, allora F è pari.
2. Se f è dispari; allora F è dispari.
3. Se f è reale, allora $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$.
4. Se f è reale e pari, allora F è reale e pari.

Se inoltre f è sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso $[-L, L]$, allora valgono anche le relazioni inverse:

1. Se F è pari, allora f è pari.
2. Se F è dispari; allora f è dispari.
3. Se F è reale, allora $f(-t) = \overline{f(t)}$.
4. Se F è reale e pari, allora f è reale e pari.

2 Lezione del 3 dicembre 2004

2.1 Proprietà della trasformata di Fourier

Nelle lezioni scorse sono state viste le due proprietà:

1. **Derivazione** - Sia $f \in C^1(\mathbb{R}), f, f' \in L^1(\mathbb{R});$ allora

$$\mathfrak{F}\{f'\} = j\omega \mathfrak{F}\{f\}.$$

2. **Moltiplicazione per t** - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$; allora $\mathfrak{F}\{f\} = F$ è derivabile e si ha

$$\mathfrak{F}\{tf(t)\} = jF'(\omega).$$

Altre proprietà sono le seguenti:

3. **Linearità** - Siano $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$; allora:

$$\mathfrak{F}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 \mathfrak{F}\{f_1\} + c_2 \mathfrak{F}\{f_2\}, \quad c_i \in \mathbb{C}.$$

4. **Traslazione in frequenza** - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; allora:

$$\mathfrak{F}\{f(t)e^{j\gamma t}\} = F(\omega - \gamma), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

5. **Traslazione temporale** - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; allora:

$$\mathfrak{F}\{f(t - A)\} = e^{-jA\omega} F(\omega), \quad A \in \mathbb{R}.$$

6. **Omotetia** - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; allora:

$$\mathfrak{F}\{f(At)\} = \frac{1}{|A|} F\left(\frac{\omega}{A}\right), \quad A \in \mathbb{R}, A \neq 0.$$

7. **Integrazione** - Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dove $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, si ha

$$\mathfrak{F}\{g\} = \frac{F(\omega)}{j\omega}.$$

8. **Convoluzione** - Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Si chiama prodotto di convoluzione di f e g , e si indica con $f * g$, la funzione

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Tale definizione è lecita, nel senso che è possibile provare che

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}) \implies f * g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Il prodotto di convoluzione gode delle proprietà associativa, distributiva, commutativa. Vale inoltre il seguente risultato: siano $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, $G(\omega) = \mathfrak{F}\{g\}$. Allora

$$\mathfrak{F}\{f * g\} = F(\omega)G(\omega).$$

2.2 Integrabilità della trasformata

Ricordiamo la formula dell'antitrasformata:

Teorema Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si supponga inoltre che f sia sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso $[-L, L]$. Ciò premesso si ha

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1)$$

Se $F \in L^1(\mathbb{R})$ allora l'integrale in (1) converge non solo nel senso del valore principale, ma anche in senso generalizzato (o improprio). In altre parole, se $F \in L^1(\mathbb{R})$ la formula dell'antitrasformata diviene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ può accadere che la sua trasformata $F = \mathfrak{F}\{f\}$ non appartenga a $L^1(\mathbb{R})$, come illustra, ad esempio il caso dell'impulso rettangolare. Pertanto, come si dice, lo spazio L^1 non è chiuso rispetto all'operatore "trasformata di Fourier".

Condizioni sufficienti affinché la trasformata appartenga a $L^1(\mathbb{R})$ si ottengono come immediata conseguenza del teorema della derivazione. Si hanno infatti i seguenti:

Corollario 1 Sia $f \in C^m(\mathbb{R})$, $f, f', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$; allora $F = o(\omega^{-n})$ per $|\omega| \rightarrow \infty$, ossia

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{F(\omega)}{\omega^{-n}} = 0$$

dove $F = \mathfrak{F}\{f\}$.

Corollario 2 Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$; allora $F \in L^1(\mathbb{R})$ (e quindi nella formula della antitrasformata si può omettere la sigla v.p., in quanto, in tal caso, (1) e (2) coincidono).

2.3 Trasformata di Fourier in L^2

2.3.1 Generalità

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile **reale** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Tale funzione si dice *a quadrato sommabile*, e si scrive $f \in L^2(\mathbb{R})$, se $|f|^2$ è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, ossia se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Esistono funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R})$, ma non a $L^1(\mathbb{R})$ e viceversa. Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t^{-1} & \text{se } t > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $f \notin L^1(\mathbb{R})$. Invece per la funzione

$$g(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $g \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \notin L^2(\mathbb{R})$. Chiaramente poi esistono funzioni appartenenti sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$; ad esempio la funzione

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$, ossia $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

2.3.2 Il Teorema di Plancherel e la trasformata in L^2

Vale il seguente:

Teorema di Plancherel - Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$. Allora:

1) L 'integrale (nel senso del valore principale)

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

esiste per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, eccetto, al più, un insieme di misura nulla.

Posto allora

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

si ha inoltre:

2) $F \in L^2(\mathbb{R})$

3) Vale la formula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

4) Vale l'identità:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

COMMENTI : la proprietà 4) è detta anche principio di conservazione della norma (o dell'energia).

La proprietà 1) suggerisce poi la seguente definizione.

DEFINIZIONE - Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$; si chiama *Trasformata di Fourier in L^2* , la funzione F definita da

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3)$$

OSSERVAZIONE : se inoltre $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora l'integrale in (3) coincide con l'integrale improprio, ossia la trasformata di Fourier in L^2 **coincide** con la trasformata di Fourier in L^1 , vista in precedenza. La definizione precedente è pertanto un'estensione del concetto di trasformata di Fourier e, ovviamente, assume rilevanza per quelle funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R})$ e non a $L^1(\mathbb{R})$, ossia per quelle funzioni per le quali la trasformata considerata nella precedente lezione non è definita.

Ciò posto, la proprietà 3) del teorema di Plancherel diviene la formula dell'antitrasformata, formula che, a differenza di quanto accade in L^1 , vale sotto le stesse ipotesi che assicurano l'esistenza della trasformata.

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2004-2005

Traccia delle lezioni

December 6, 2004

1 Lezione del 6 dicembre 2004

1.1 Proprietà di simmetria

Dal teorema di Plancherel visto nella lezione precedente, segue l'importante proprietà della trasformata in L^2 :

Teorema (Proprietà di simmetria) *Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ e sia $\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega)$ la sua trasformata. Allora $F \in L^2(\mathbb{R})$ e*

$$\mathfrak{F}\{\mathfrak{F}\{f\}\} = 2\pi f(-\omega).$$

In particolare, se f è inoltre pari, allora la trasformata della trasformata di Fourier di f coincide con f , a meno di un fattore 2π .

Conseguenze:

◆ Poiché la trasformata dell'impulso rettangolare

$$f(t) = \begin{cases} M & \text{se } |t| \leq L; \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

è la funzione

$$F(\omega) = 2ML\text{sinc}(\omega L),$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$g(t) = 2ML\text{sinc}(Lt)$$

è

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = G(\omega) = \begin{cases} 2\pi M & \text{se } |\omega| \leq L \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

◆ Poiché la trasformata dell'impulso esponenziale

$$f(t) = \exp(-|t|);$$

è la funzione

$$F(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2},$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$g(t) = \frac{2}{1 + t^2}$$

è

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = G(\omega) = 2\pi \exp(-|\omega|).$$

Per la Trasformata di Fourier in L^2 continuano a valere le proprietà della linearità, dell'omotetia, della traslazione temporale e in frequenza, viste la lezione scorsa.

Per quanto poi concerne le proprietà di $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, quando $f \in L^2(\mathbb{R})$, dal teorema di Plancherel si ha subito:

1. f è pari [dispari] se e solo se F è pari [dispari];
2. f è reale e pari se e solo se F è reale e pari.

Osserviamo infine che, a differenza di quanto accade per la trasformata in L^1 , se $f \in L^2(\mathbb{R})$, allora $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$ può essere discontinua e non infinitesima (per $|\omega| \rightarrow +\infty$).

1.2 Il caso razionale

Teorema (trasformata) - Sia f razionale. Allora f è trasformabile secondo Fourier in L^2 se e solo se f è propria e priva di poli reali. Indicati con $s_1, \dots, s_N$ i poli di f , si ha:

$$\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega) = \begin{cases} 2\pi j \sum_{\text{Im } s_i > 0} \text{Res } [f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega < 0 \\ -2\pi j \sum_{\text{Im } s_i < 0} \text{Res } [f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega > 0 \end{cases}.$$

Teorema (antitrasformata) - Sia F razionale. Allora F è trasformabile secondo Fourier in L^2 se e solo se F è propria e priva di poli reali. Indicati con $s_1, \dots, s_N$ i poli di F , l'antitrasformata f di F è data da:

$$f(t) = \begin{cases} -j \sum_{\text{Im } s_i < 0} \text{Res} [F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t < 0 \\ j \sum_{\text{Im } s_i > 0} \text{Res} [F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

Entrambi i teoremi precedenti si provano utilizzando la teoria dei Residui e il Lemma di Jordan nella versione sotto riportata, come è stato dettagliatamente illustrato a lezione.

Lemma di Jordan - Sia $g(s)$ una funzione complessa, analitica per $|s|$ grande e tale che $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$. Allora:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} g(s)e^{jms} ds = 0$$

se:

i) C_R è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio R , contenuta nel semipiano $\text{Im } s > 0$ e m è un numero reale positivo (vedi figura 1);

oppure se:

ii) C_R è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio R , contenuta nel semipiano $\text{Im } s < 0$ e m è un numero reale negativo (vedi figura 2).

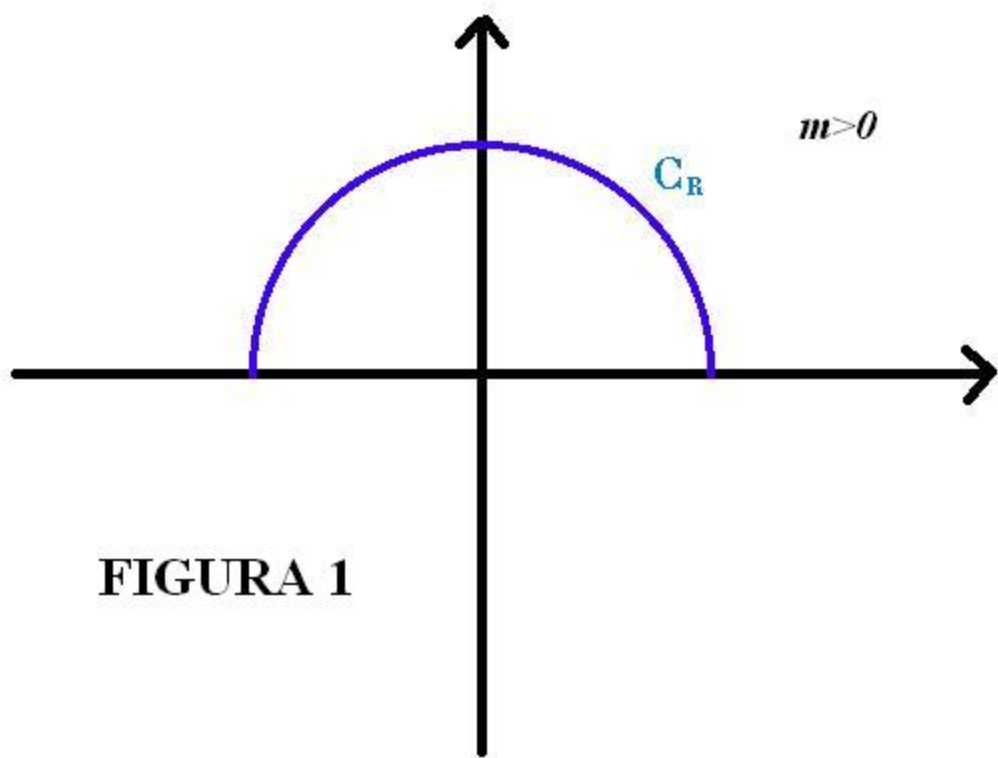


FIGURA 1

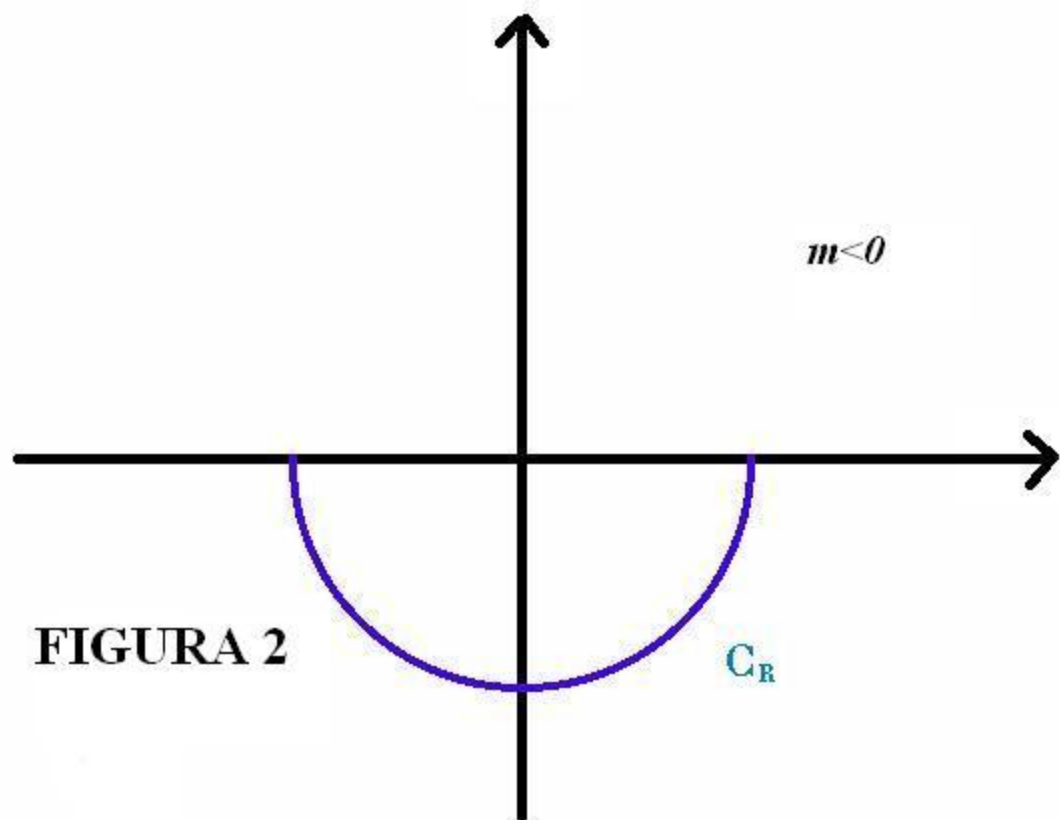


FIGURA 2

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2004-2005

Traccia delle lezioni

December 10, 2004

1 Lezione del 10 dicembre 2004

1.1 Il Teorema del campionamento

Un'importante applicazione della trasformata di Fourier nell'ambito della trasmissione di segnali è data dal Teorema di Shannon (o del campionamento) : si veda Cap. 3.14 in M. Marini "*Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche*", Edizioni Cedam, 1999

1.2 Equazioni differenziali lineari - Richiami

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{1}$$

dove le funzioni a, b sono continue a tratti in un intervallo I dell'asse reale. Allora:

1. Per ogni $x_0 \in I$ e per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione $y = y(x)$ di (1) tale che $y(x_0) = c_1, y'(x_0) = c_2$.
2. Ogni soluzione di (1) è persistente, ossia è definita in tutto l'intervallo I .
3. L'insieme delle soluzioni di (1) è uno spazio lineare di dimensione 2 .

1.3 Esempi

Se le funzioni a e b sono costanti, allora (1) diviene un'equazione "a coefficienti costanti" la cui risolubilità è stata trattata nei corsi di Analisi. Esistono tuttavia nelle applicazioni vari casi in cui il modello matematico è rappresentato da un'equazione tipo (1) con a e/o b non a coefficienti costanti. Un primo esempio è l'equazione di Schrödinger monodimensionale

$$w'' + \frac{2m}{H^2}(E - V(x))w = 0 \quad (2)$$

dove :

m rappresenta la massa dell'elettrone;

H è la costante di Planck normalizzata (i.e. $H = h/(2\pi)$, h = costante di Planck);

E è l'energia dell'elettrone;

V è il potenziale applicato;

w è una funzione legata alla funzione d'onda ($|w(x)|^2$ rappresenta la probabilità che l'elettrone occupi effettivamente la posizione x).

L'equazione (2) è di tipo (1) con

$$a(x) = 0, \quad b(x) = \frac{2m}{H^2}(E - V(x)).$$

Nel corso della lezione è stata analizzata l'equazione (2) nei due casi seguenti:

1. Gradino di potenziale :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{con } V_0 > E) \quad (3)$$

2. Barriera di potenziale :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{se } 0 < x < X \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{con } V_0 > E). \quad (4)$$

- Un altro esempio infine è dato dall'equazione di Bessel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (5)$$

dove n è un **numero reale** e $x \in I = (0, \infty)$.

1.3.1 Oscillazione

Si consideri l'equazione (1) con a, b continue a tratti in $I = (0, \infty)$. Sia y una soluzione di (1), diversa dalla soluzione nulla; y si dice *oscillante* se esiste una successione $\{x_n\}$, con $x_n \rightarrow +\infty$, tale che $y(x_n) = 0$, ossia se y ha infiniti zeri che si "accumulano all'infinito". In caso contrario y si dice *nonoscillante*.

Valgono i seguenti:

Teorema di Sturm - *Tutte le soluzioni di (1), escluso la soluzione nulla, hanno lo stesso carattere rispetto all'oscillazione, ossia o tutte oscillano o tutte nonoscillano.*

In virtù di tale risultato allora non possono coesistere per una stessa equazione di tipo (1) soluzioni oscillanti e nonoscillanti; pertanto (1) si dice *oscillante* o *nonoscillante* a seconda che tutte le sue soluzioni (diverse dalla soluzione nulla) siano oscillanti o nonoscillanti.

Teorema di Leighton -

(i) L'equazione (1) è oscillante se

$$\int^{\infty} \frac{1}{p(x)} dx = \int^{\infty} q(x) dx = \infty$$

dove

$$p(x) = e^{\int_{x_0}^x a(s) ds}, \quad q(x) = b(x) e^{\int_{x_0}^x a(s) ds}. \quad (6)$$

(ii) L'equazione (1) è nonoscillante se

$$q(x) \leq -M < 0 \text{ per ogni } x \text{ sufficientemente grande}$$

dove q è definita in (6).

• ESEMPI

Applicando il Teorema di Leighton si ottiene facilmente:

1) L'equazione

$$y'' + \frac{2x^2 + 1}{4x^2 + 4} y = 0$$

è oscillante.

2) L'equazione

$$y'' + \frac{1 - 2x^2}{4x^2 + 4}y = 0$$

è nonoscillante.

3) L'equazione (2) con V dato da (3) è nonoscillante.

4) L'equazione (2) con V dato da (4) è oscillante.

5) L'equazione di Bessel (5) è oscillante.

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2004-2005

Traccia delle lezioni

December 13, 2004

1 Lezione del 13 dicembre 2004

1.1 L'equazione di Bessel (caso n intero positivo)

Si chiama equazione di Bessel l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \quad x \in (0, +\infty) \quad (\text{B})$$

dove n è un parametro reale.

Nel caso particolare in cui n sia un intero positivo, si può dimostrare che tra le soluzioni di (B) vi sono le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \quad (1)$$

Le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie* e godono delle seguenti proprietà:

1. se n è pari, allora J_n è una serie di polinomi pari;
2. se n è dispari, allora J_n è una serie di polinomi dispari;
3. $J_0(0+) = 1$; $J_n(0+) = 0$ per n intero positivo;
4. le funzioni di Bessel J_n sono funzioni oscillanti, ossia hanno infiniti zeri reali positivi che si accumulano all'infinito.

1.2 La funzione Gamma Euleriana

Si chiama *Gamma Euleriana* la funzione

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Tale integrale converge per ogni valore positivo del parametro reale x e quindi la funzione Gamma Euleriana è definita in $(0, \infty)$. Essa gode delle seguenti proprietà (di immediata verifica):

1. $\Gamma(1) = 1$;
2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (e quindi $\Gamma(2) = 1$);
3. $\Gamma(x+2) = x(x+1)\Gamma(x)$;
4. $\Gamma(x+3) = x(x+1)(x+2)\Gamma(x)$;
-
5. $\Gamma(x+n) = x(x+1).....(x+n-1)\Gamma(x)$;

Ponendo in (6) $x = 1$ si ha poi l'importante proprietà

$$\Gamma(n+1) = n!$$

ossia **la funzione Gamma Euleriana è l'estensione al caso continuo del concetto di fattoriale.**

Come conseguenza delle relazioni 1) ,...5) si ha che la funzione Γ è nota, quando siano noti i valori che Γ assume in $(0, 1]$. Infatti se Γ è nota in $(0, 1]$, usando 2) si ottiene che Γ è nota anche in $(1, 2]$. Usando poi 3) si ottiene che Γ è nota anche in $(2, 3]$, e così via. Tale risultato può essere migliorato. Infatti è possibile provare che per $x \in (0, 1/2]$ vale la relazione

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

e da tale relazione ne segue che se Γ è nota in $(0, 1/2]$, allora Γ è nota anche in $[1/2, 1)$.

In conclusione:

I valori della funzione Γ sono noti, non appena siano noti i valori che Γ assume in $(0, 1/2]$.

Per tale motivo i valori di Γ vengono usualmente tabulati per $x \in (0, 1/2]$.

Usando le relazioni 2), ...5) è possibile poi estendere la definizione della funzione Γ anche sul semiasse negativo, ad eccezione dei punti $-1, -2, -3, \dots$. Infatti da 2) si ha per $x \neq 0$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1);$$

poichè il secondo membro ha senso anche per $x \in (-1, 0)$ si può usare tale relazione per estendere la definizione di Γ anche all'intervallo $(-1, 0)$. Precisamente si pone allora

$$\Gamma(x) =_{\text{def}} \frac{1}{x} \Gamma(x+1) \quad \text{se } x \in (-1, 0).$$

Usando poi le relazioni 3)..5) si può procedere nell'estensione della definizione di Γ sul semiasse negativo. Precisamente si pone

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &=_{\text{def}} \frac{1}{x(x+1)} \Gamma(x+2) & \text{se } x \in (-2, -1) \\ \Gamma(x) &=_{\text{def}} \frac{1}{x(x+1)(x+2)} \Gamma(x+3) & \text{se } x \in (-3, -4) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

1.3 Funzioni di Bessel (caso n reale)

Nel caso in cui n sia un numero reale, tra le soluzioni di (B) vi sono le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \quad (2)$$

e, analogamente a sopra, le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie*. Se n è intero positivo, poichè $\Gamma(k+n+1) = (n+k)!$, l'espressione (2) si riduce a (1).

Vale il seguente:

Teorema -

(i) Fissato $n \in \mathbb{R}$, le funzioni J_n e J_{-n} sono entrambe soluzioni di (B).

(ii) Se n è intero, i.e. $n \in \mathbb{Z}$, allora

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x),$$

e quindi J_n e J_{-n} sono linearmente dipendenti.

(iii) Se n è reale, ma non intero, i.e. $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, allora J_n e J_{-n} sono linearmente indipendenti.

Pertanto se $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ricordando che lo spazio delle soluzioni di (B) ha dimensione 2, dal Teorema precedente (punto (iii)) si ha che tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x), \quad (3)$$

dove c_1, c_2 sono due arbitrarie costanti reali. Scegliendo poi in (3)

$$c_1 = \frac{\cos \pi n}{\sin \pi n}, \quad c_2 = \frac{-1}{\sin \pi n}$$

si ottiene la soluzione di (B) data da

$$Y_n(x) = \frac{\cos \pi n}{\sin \pi n} J_n(x) - \frac{1}{\sin \pi n} J_{-n}(x) \quad (n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Le funzioni Y_n si chiamano *funzioni di Bessel di seconda specie*, per quanto appena detto, sono anch'esse soluzioni di (B).

Nel caso infine in cui n sia intero, si definiscono le funzioni di Bessel di seconda specie nel modo seguente:

$$Y_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} \left(\frac{\cos \pi p}{\sin \pi p} J_p(x) - \frac{1}{\sin \pi p} J_{-p}(x) \right) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

e si può provare che anche in tal caso le funzioni Y_n sono soluzioni di (B).

Inoltre le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n sono linearmente indipendenti da J_n , sia nel caso n intero che nel caso $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Infine si chiamano *funzioni di Hankel* le funzioni

$$H_n^\pm(x) = J_n(x) \pm j Y_n(x)$$

dove j rappresenta l'unità immaginaria.

1.4 Formule di ricorrenza

Per le funzioni di Bessel valgono le seguenti formule:

$$\frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x) \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} (x^{-n} J_n(x)) = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad (5)$$

Da (4) e (5) si hanno poi le cosiddette *formule di ricorrenza*

$$xJ'_n(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x)$$

$$xJ'_n(x) = xJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$$

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

$$2nJ_n(x) = xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x).$$

Tali formule poi continuano a valere anche per le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n .

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2004-2005

Traccia delle lezioni

December 30, 2004

1 Lezioni del 16 e 17 dicembre 2004

1.1 Le distribuzioni - definizione

Ricordiamo che una funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *a supporto compatto* se esiste un intervallo compatto (i.e. limitato e chiuso) $[a, b]$ dell'asse reale tale che $\varphi(t) = 0$ se $t \notin [a, b]$. L'intervallo $[a, b]$, all'esterno del quale φ è nulla, si chiama *supporto di φ* . E' evidente che la funzione φ è univocamente individuata non appena siano noti i valori assunti da φ sul supporto.

Si consideri poi lo spazio vettoriale D formato da tutte le funzioni reali (di variabile reale) infinitamente derivabili e a supporto compatto, ossia

$$D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\}.$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni test* ed è possibile definire in tale spazio una nozione di convergenza (vedi Appendice).

Si osservi poi che il supporto dipende dalla funzione φ considerata. Ad esempio la funzione α data da

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-t^2)} & \text{se } |t| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

appartiene a D ed il suo supporto è $[-1, 1]$. Analogamente la funzione β data da

$$\beta(t) = \begin{cases} e^{-1/(4-t^2)} & \text{se } |t| < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a D ed il suo supporto è $[-2, 2]$.

Ciò premesso si chiama *spazio delle distribuzioni* l'insieme formato da tutti i funzionali (vedi Appendice) lineari e continui definiti su D . Tale spazio si indica con il simbolo $\mathfrak{D}$, ossia

$$\mathfrak{D} = \{T : D \rightarrow \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Pertanto $T \in \mathfrak{D}$ se :

- 1) T è un funzionale, i.e. $T : D \rightarrow \mathbb{R}$
- 2) T è lineare, ossia

$$T(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1T(\varphi_1) + c_2T(\varphi_2), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D.$$

- 3) T è continuo, ossia se $\{\varphi_n\} \xrightarrow{D} \varphi$, allora $\{T(\varphi_n)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi)$.

1.2 Esempi

Sono elementi di $\mathfrak{D}$ (e quindi distribuzioni) i seguenti funzionali (dove φ indica una generica funzione di D):

1. $T_{\sin t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \sin t \, dt$
2. $T_{t^3}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) t^3 \, dt$
3. $T_{e^t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^t \, dt$.

In generale, **fissata** una funzione $f \in L^1_{loc}$, dove

$$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ assolutamente integrabili in ogni compatto di } \mathbb{R}\},$$

sono elementi di $\mathfrak{D}$ i funzionali del tipo

4. $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) \, dt,$

dove φ indica, come prima, una generica funzione di D . Altre distribuzioni (i.e. elementi di $\mathfrak{D}$) sono poi i funzionali

$$5. \Delta_0(\varphi) = \varphi(0)$$

$$6. \Delta_a(\varphi) = \varphi(a)$$

dove a è un generico numero reale e φ è una generica funzione di D .

Usualmente i funzionali Δ_0, Δ_a vengono indicati con i simboli $\delta(t), \delta(t-a)$.

In riferimento all'Esempio 1., il valore $T_{\sin t}(\varphi)$, assunto dal funzionale T , viene indicato con

$$T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle ;$$

e il simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si chiama *crochet*; la scrittura $\langle \sin t, \varphi(t) \rangle$ si legge *crochet tra $\sin t$ e φ* .

Pertanto le distribuzioni sopra definite negli Esempi 1., 2., 3., 4. si indicano anche con i simboli

$$1. T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \sin t \, dt$$

$$2. T_{t^3}(\varphi) = \langle t^3, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) t^3 \, dt$$

$$3. T_{e^t}(\varphi) = \langle e^t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^t \, dt.$$

$$4. \text{ Per ogni } f \in L^1_{loc} \text{ fissata}$$

$$T_f(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt. \quad (1)$$

Analogamente per le distribuzioni $\delta(t)$ e $\delta(t-a)$ si ha

5.

$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(0)$$

6.

$$\langle \delta(t-a), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(a).$$

1.3 Le distribuzioni come estensione dello spazio L^1_{loc}

Mostriamo che lo spazio $\mathfrak{D}$ è una estensione dello spazio

$$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ assolutamente integrabili in ogni compatto di } \mathbb{R}\}.$$

Ricordiamo che in tale spazio due funzioni f, g , coincidono se

$$f(t) = g(t), \quad \text{eccetto un insieme di misura nulla.}$$

Ciò premesso si ha il seguente:

Teorema - Siano $f, g \in L^1_{loc}$. Se

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in D \quad (2)$$

(ossia, usando la notazione con il crochet, se

$$\langle f(t), \varphi(t) \rangle = \langle g(t), \varphi(t) \rangle \quad \forall \varphi \in D) \quad (3)$$

allora f e g coincidono in L^1_{loc} . Vale poi, ovviamente, il viceversa, ossia se f e g coincidono in L^1_{loc} , allora (2) [i.e. (3)] è soddisfatta.

Da questo risultato ne segue che le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}$, definite tramite funzioni di L^1_{loc} , ossia le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}$ il cui crochet è dato da (1) sono "tante quanti gli elementi di L^1_{loc} ".

In altre parole se indichiamo con $\mathfrak{D}^*$ il sottoinsieme di $\mathfrak{D}$ formato da tutte le distribuzioni il cui crochet è dato da (1), ossia

$$\mathfrak{D}^* = \left\{ T \in \mathfrak{D} : \exists f \in L^1_{loc} : T(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in D \right\},$$

per il Teorema precedente il sottospazio $\mathfrak{D}^*$ è in corrispondenza biunivoca con L^1_{loc} , ossia

$$\mathfrak{D}^* \sim L^1_{loc}$$

Quindi lo spazio delle distribuzioni $\mathfrak{D}$ può essere interpretato come una estensione di L^1_{loc} .

Non è difficile poi provare che si tratta di una **effettiva** estensione, ossia ogni $f \in L^1_{loc}$ può essere pensata come distribuzione (precisamente quella il cui crochet è definito da (1)), ma esistono anche distribuzioni, ad esempio

$\delta(t), \delta(t-a)$, che **non** possono essere definite tramite funzioni di L_{loc}^1 , e quindi che non appartengono a $\mathfrak{D}^*$.

Pertanto si ha

$$L_{loc}^1 \sim \mathfrak{D}^* \subsetneq \mathfrak{D}$$

i.e. $\mathfrak{D}^*$ è strettamente contenuto in $\mathfrak{D}$, in quanto, come si è appena affermato, le distribuzioni $\delta(t), \delta(t-a)$, prima considerate, non sono elementi di $\mathfrak{D}^*$.

1.4 Convergenza in $\mathfrak{D}$

Per analizzare le proprietà delle distribuzioni è utile introdurre in $\mathfrak{D}$ una nozione di convergenza. Precisamente diremo che *una successione di distribuzioni $\{T_n\}$ converge in $\mathfrak{D}$ ad una distribuzione T se la successione numerica $\{T_n(\varphi)\}$ converge a $T(\varphi)$ per ogni $\varphi \in D$* ; ossia

$$\{T_n\} \xrightarrow{\mathfrak{D}} T \quad \text{se} \quad \{T_n(\varphi)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi) \quad \forall \varphi \in D$$

o, equivalentemente,

$$\lim_n T_n \stackrel{\mathfrak{D}}{=} T \quad \text{se} \quad \lim_n T_n(\varphi) \stackrel{\mathbb{R}}{=} T(\varphi) \quad \forall \varphi \in D.$$

Utilizzando tale nozione, si può provare il seguente Teorema (di rappresentazione):

Teorema - *Ogni distribuzione è limite (in $\mathfrak{D}$) di una successione di elementi di L_{loc}^1 , ossia*

$$\overline{L_{loc}^1} = \mathfrak{D}.$$

In altre parole il Teorema precedente afferma che per ogni $T \in \mathfrak{D}$ esiste una successione $\{f_n(t)\}$, contenuta in L_{loc}^1 , che converge in $\mathfrak{D}$ (nel senso sopra specificato) alla distribuzione T .

Ad esempio è facile provare che la distribuzione $\delta(t)$ sopra definita è il limite (in $\mathfrak{D}$) della successione $\{k_n(t)\}$, dove

$$k_n(t) = \begin{cases} n & \text{se } t \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In altre parole la distribuzione $\delta(t)$ gode della **importante** proprietà:

$$\delta(t) \stackrel{\mathfrak{D}}{=} \lim_n k_n(t)$$

2 Appendice

2.1 Convergenza in D

La nozione di convergenza nello spazio D delle funzioni test si definisce nel seguente modo: diremo che una successione $\{\varphi_n\}$ converge a φ se:

- 1) $\varphi_n, \varphi \in D$;
 - 2) esiste un intervallo compatto I tale che $\varphi_n(t) = \varphi(t) = 0$ se $t \notin I$;
 - 3) la successione $\{\varphi_n^{(i)}\}$ converge uniformemente a $\varphi^{(i)}$ in $\mathbb{R}$ per $i = 0, 1, 2, 3, \dots$
- ossia
- la successione $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a φ in $\mathbb{R}$,
 - la successione $\{\varphi_n'\}$ converge uniformemente a φ' in $\mathbb{R}$,
 - la successione $\{\varphi_n''\}$ converge uniformemente a φ'' in $\mathbb{R}$,
 -

2.2 Funzionale

Sia V uno spazio vettoriale; si chiama *funzionale in V* ogni funzione F definita in V e a valori in $\mathbb{R}$, i.e.

$$F : V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ad esempio se V è lo spazio delle funzioni continue in $[0, 1]$, sono funzionali in V i seguenti (dove $x = x(t)$ indica una generica funzione continua in $[0, 1]$):

$$F_1(x) = \int_0^1 x(s) ds$$

$$F_2(x) = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$$

$$F_3(x) = 437x(0) + 567x(1)$$

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2004-2005

Traccia delle lezioni

January 10, 2005

1 Lezioni del 10 gennaio 2005

1.1 Derivata di una distribuzione

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Allora $f' \in L^1_{loc}$ e quindi f' può essere pensata come distribuzione e sia ha

$$\langle f'(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(t) \varphi(t) dt$$

Utilizzando poi la regola di integrazione per parti si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} f'(t) \varphi(t) dt = - \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi'(t) dt = - \langle f(t), \varphi'(t) \rangle ;$$

pertanto

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \implies \langle f'(t), \varphi(t) \rangle = - \langle f(t), \varphi'(t) \rangle .$$

Tale relazione suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione; si chiama *derivata di T* (nel senso delle distribuzioni) e si indica con DT , la distribuzione definita da

$$\langle DT, \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} - \langle T, \varphi'(t) \rangle , \quad \forall \varphi \in D.$$

Proprietà:

- Ogni distribuzione è derivabile infinite volte.

-

$$\text{Se } f \in C^1(\mathbb{R}) \implies f' \equiv Df$$

-

$$D[u(t)] = \delta(t).$$

-

$$D[u(t) - u(t - a)] = \delta(t) - \delta(t - a).$$

- **Teorema** - Se $f \in C^1(\mathbb{R}/\{t_0\})$ e $f' \in L^1_{loc}$, allora

$$f(t_0+) = \lim_{t \rightarrow t_0+} f(t), \quad f(t_0-) = \lim_{t \rightarrow t_0-} f(t),$$

esistono finiti e si ha

$$Df = f'(t) + [f(t_0+) - f(t_0-)]\delta(t - t_0).$$

Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 5e^{2t} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha

$$Df = f'(t) + 5\delta(t).$$

Il teorema precedente si estende poi immediatamente al caso in cui f sia derivabile con derivata continua in tutto $\mathbb{R}$, eccetto un numero finito o un'infinità numerabile di punti.

- La distribuzione $\delta(t)$ è derivabile e si ha

$$\langle \delta'(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} -\varphi'(0), \quad \forall \varphi \in D$$

$$\langle \delta''(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} \varphi''(0), \quad \forall \varphi \in D$$

.....

$$\langle \delta^{(n)}(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} (-1)^n \varphi^{(n)}(0), \quad \forall \varphi \in D.$$

In modo analogo si definiscono le derivate di $\delta(t - a)$.

1.2 Prodotto di distribuzioni

Ricordiamo che nello spazio L^1_{loc} il prodotto non sempre è definito. Ad esempio la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a L^1_{loc} , ma $f^2 \notin L^1_{loc}$. Tuttavia se $f \in L^1_{loc}$ e $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora il prodotto $f \cdot g$ è, ovviamente, definito e si ha

$$\langle f \cdot g, \varphi \rangle = \langle f, g \cdot \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D.$$

Tale relazione suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione e sia $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si chiama *distribuzione prodotto* $T \cdot g$ la distribuzione definita da

$$\langle T \cdot g, \varphi \rangle = \langle T, g \cdot \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D$$

Nello spazio delle distribuzioni si definisce il prodotto soltanto nel caso precedente, i.e. quando almeno uno dei due fattori è una funzione ("tradizionale") di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Pertanto, ad esempio non si definiscono i simboli $\delta^2(t)$, $e^{-|t|}\delta(t)$, $(\log t)\delta(t)$, $t^{-7}\delta(t)$.

Provare che

$$\begin{aligned} e^{2t}\delta(t) &= \delta(t); \\ (t^2 + 4)\delta(t) &= 4\delta(t) \\ \sin t \delta(t - \frac{\pi}{2}) &= \delta(t - \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

ESERCIZI

Verificare che

$$\begin{aligned} D[(3 + 5t)\delta'(t - 1)] &= -5\delta'(t - 1) + 8\delta''(t - 1) \\ (t - 1)\delta'(t) &= D[(\sin t)\delta'(t) - u(t)] \\ tDf &= f(t) - 4\delta(t) \end{aligned}$$

dove $f(t) = t[u(t) - u(t - 2)]$.

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2004-2005

Traccia delle lezioni

January 14, 2005

1 Lezioni del 13 e 14 gennaio 2005

1.1 Le distribuzioni temperate

Si consideri lo spazio vettoriale S definito da

$$S = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : t^j \varphi^{(k)}(t) \rightarrow 0 \text{ per } |t| \rightarrow +\infty, j, k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni a decrescenza rapida*. Infatti una funzione φ appartiene a tale spazio se è infinitamente derivabile e tende a zero (per $t \rightarrow \pm\infty$), insieme a tutte le derivate $\varphi^{(i)}$, più velocemente di qualunque potenza di t . Ad esempio la funzione $\varphi(t) = e^{-t^2}$ appartiene a S . Ricordando la definizione dello spazio D delle funzioni test

$$D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\},$$

si ha

$$D \subsetneq S.$$

E' poi possibile definire in tale spazio una nozione di convergenza.

Ciò premesso si consideri lo spazio formato da tutti i funzionali lineari e continui definiti su S . Tale spazio si indica con il simbolo $\mathfrak{S}$, ossia

$$\mathfrak{S} = \{T : S \rightarrow \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Tenendo conto che

$$D \subsetneq S,$$

si ha allora

$$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{D},$$

ossia $\mathfrak{S}$ è un sottospazio di $\mathfrak{D}$. Gli elementi di $\mathfrak{S}$ sono quindi particolari distribuzioni, che prendono nome di *distribuzioni temperate* e il sottospazio $\mathfrak{S}$ si chiama *spazio delle distribuzioni temperate*.

E' possibile provare che sono distribuzioni temperate (i.e. elementi di $\mathfrak{S}$):

1. le funzioni $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ (quindi, in particolare, sono distribuzioni temperate tutte le funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$);
2. le funzioni $f \in L^1_{loc}$ e a crescita lenta, ossia tali che $\exists M, q \geq 0 :$
 $|f(t)| \leq M(1 + |t|^q)$;
3. le funzioni $f \in L^1[a, b]$ e periodiche di periodo $b - a$;
4. le distribuzioni $\delta(t)$, $\delta(t - a)$;
5. se $T \in \mathfrak{S}$ allora $DT \in \mathfrak{S}$ (in particolare quindi sono distribuzioni temperate $\delta^{(n)}(t)$, $\delta^{(n)}(t - a)$).

Non sono invece distribuzioni temperate le funzioni

$$e^t, e^{-t}, \sinh t, \cosh t.$$

Quindi $\mathfrak{S}$ è un sottospazio proprio di $\mathfrak{D}$.

Si osservi poi che, in virtù di 2., sono distribuzioni temperate le funzioni costanti, i polinomi, le funzioni $\sin t$, $\cos t$.

1.2 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Sia $\varphi \in S$. Essendo φ a decrescenza rapida si ha $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi φ ammette trasformata di Fourier. Sia pertanto Φ la sua trasformata, ossia $\Phi(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi\}$. Usando le proprietà della trasformata di Fourier in L^1 , è possibile provare che "lo spazio S è chiuso rispetto all'operatore trasformata di Fourier", ossia che vale il seguente:

Lemma - Sia $\varphi \in S$ e sia Φ la sua trasformata di Fourier. Allora $\Phi \in S$.

Si ha poi il seguente:

Teorema - Sia $f \in L^1(R) \cup L^2(R)$ e sia F la sua trasformata di Fourier, ossia $F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}$. Allora

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle f, \Phi \rangle, \quad \forall \varphi \in S$$

ossia

$$\langle \mathcal{F}\{f\}, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle, \quad \forall \varphi \in S.$$

Tale Teorema suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione temperata; si chiama *trasformata di Fourier di T* (nel senso delle distribuzioni) e si indica con $\mathcal{F}_D\{T\}$, la distribuzione temperata definita da

$$\langle \mathcal{F}_D\{T\}, \varphi \rangle =_{\text{def}} \langle T, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle, \quad \forall \varphi \in S.$$

Tale definizione riconduce quindi il calcolo della trasformata $\mathcal{F}_D$ a quello della trasformata "classica" $\mathcal{F}$ (i.e. in L^1 o L^2). Dal Teorema precedente si ha poi la seguente proprietà

•

Se $f \in L^1(R) \cup L^2(R)$ allora $\mathcal{F}_D\{f\} \equiv \mathcal{F}\{f\}$,

ossia se $f \in L^1(R) \cup L^2(R)$ allora la trasformata nel senso delle distribuzioni di f coincide con quella "classica".

La definizione precedente acquista quindi significato per quelle "funzioni" che non appartengono a $L^1(R) \cup L^2(R)$. In particolare vale la seguente tabella per le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni "elementari" a crescita lenta

funzione	→	trasformata
1		$2\pi\delta(\omega)$
t		$2\pi j\delta'(\omega)$
t^n		$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$
e^{jAt} ($A \in \mathbb{R}$)		$2\pi\delta(\omega - A)$
$\sin(At)$		$\pi j[\delta(\omega + A) - \delta(\omega - A)]$
$\cos(At)$		$\pi[\delta(\omega + A) + \delta(\omega - A)]$

Per la distribuzione $\delta(t)$ si ha poi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_D \{ \delta(t) \} &= 1 \\ \mathcal{F}_D \{ \delta(t - a) \} &= e^{-ja\omega}, \quad a \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Vale infine la proprietà

$$T \in \mathfrak{S} \implies \mathcal{F}_D \{ DT \} = j\omega \mathcal{F}_D \{ T \}.$$