ANALISI MATEMATICA 3
A.A. 2005-2006
ESERCIZI - parte prima

January 25, 2006

1 Trasformata di Fourier

Notazione : indichiamo con $u(t)$ la funzione scalino, ossia

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 1.1 - Stabilire quali delle seguenti funzioni è trasfomabile secondo Fourier in L^1 e/o in L^2.

$$f_1(t) = e^{-t};\ f_2(t) = e^{-t}u(t);\ f_3(t) = e^{t};\ f_4(t) = e^{t}u(t);$$
$$f_5(t) = e^{-|t|};\ f_6(t) = e^{t}[u(t) - u(t-7)];\ f_7(t) = \frac{1}{t}u(t);$$
$$f_8(t) = \frac{1}{t}u(t-5);\ f_9(t) = \frac{1}{t^2}u(t);\ f_{10}(t) = \frac{1}{t^2}u(t-6);$$
$$f_{11}(t) = \frac{1}{t-4}u(t-4);\ f_{12}(t) = \frac{1}{t-4}u(t-7);$$
$$f_{13}(t) = \frac{1}{(t-4)^3}u(t-7);\ f_{14}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}[u(t) - u(t-4)];$$
$$f_{15}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}u(t-4).$$

ESERCIZIO 1.2 - A quale delle funzioni di cui all'Esercizio 1.1 è applicabile il Teorema di Plancherel?

ESERCIZIO 1.3 - Si considerino le funzioni

$$\begin{aligned} g_1(t) &= 5t^2[u(t) - u(t-9)] \\ g_2(t) &= (\sin t)e^{-t^2} \\ h_1(t) &= g_1(t-4)e^{jt} \\ h_2(t) &= g_2(t+\pi)e^{-3jt}. \end{aligned}$$

Tali funzioni ammettono trasformata di Fourier in L^1? E in L^2 ? In caso affermativo la trasformata di Fourier è continua ? E' derivabile? Se sì, quante volte?

ESERCIZIO 1.4 - Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{t^2+5t+8}; \; f_2(t) = \frac{t-2}{t^2+5t+8}; \\ f_3(t) &= \frac{2}{3+2t^2}; \; f_4(t) = \frac{t+1}{2t^2+3}; \\ f_5(s) &= \frac{t+5}{t^2+2t+j}; \; f_6(t) = \frac{5}{t^2+2jt+j}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.5 - Calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni

$$\begin{aligned} g_i(t) &= f_i(t)e^{5jt} \\ h_i(t) &= f_i(t-9) \end{aligned}$$

dove le funzioni f_i sono definite nell'Esercizio 1.4.

ESERCIZIO 1.5 - Calcolare l'antitrasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \frac{2\omega}{\omega^2+j}; \; F_2(\omega) = \frac{2\omega}{\omega^2-j}; \\ F_3(\omega) &= \frac{2j}{\omega^2+4}; \; F_4(\omega) = \frac{2\omega}{\omega^2+\omega+6}; \\ F_5(\omega) &= \frac{1}{j\omega+1}; \; F_6(\omega) = \frac{\omega-4}{(\omega-4)^2+6}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.6 - Calcolare l'antitrasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$G_i(\omega) = F_i(\omega)e^{3j\omega},$$

dove le funzioni F_i sono definite nell'Esercizio 1.5.

ESERCIZIO 1.7 - Quali delle seguenti funzioni sono trasformate di Fourier in L^2 ?

$$F_1(\omega) = \frac{\omega + j}{\omega + 1};\ F_2(\omega) = \frac{\omega + j}{\omega^2 + 1};$$
$$F_3(\omega) = \frac{\omega + j}{\omega^2 - 1};\ F_4(\omega) = \frac{\omega^2 + 7\omega + 2}{\omega^2 + 9};$$
$$F_5(\omega) = \frac{\omega^2 + 7\omega + 2}{\omega^3 + 9};\ F_4(\omega) = \frac{\omega^2 + 7\omega + 2}{\omega^4 + 9}.$$

ESERCIZIO 1.8 - A quale delle seguenti funzioni è applicabile il Lemma di Jordan?

$$F_1(s) = \frac{5s^2 + 4}{s^2 + 16}; F_2(s) = \frac{5s^2 + 4}{s^2 + 16}e^{-s}; F_3(s) = \frac{5s + 4}{s^2 + 16}.$$

ESERCIZIO 1.9 - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, reale dispari e a supporto compatto. Sia F la sua trasformata di Fourier. Quanto vale $F(0)$?

ESERCIZIO 1.10 - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, e sia F la sua trasformata di Fourier. E' vera l'affermazione

$$\lim_{\omega \to +\infty} F(\omega) = \lim_{\omega \to 0} \omega F(\omega) \ ?$$

RISPOSTE:

Esercizio 1.1 : sono trasformabili in L^1 e in L^2 le funzioni f_2, f_5, f_6, f_{10}, f_{13}. Sono trasformabili in L^2 e non in L^1 le funzioni f_8, f_{12}. E' trasformabile in L^1 e non in L^2 la funzione f_{14}. Le altre funzioni non sono trasformabili né in L^1 né in L^2.

Esercizio 1.2 : E' applicabile alle funzioni trasformabili in L^2, ossia a f_2, f_5, f_6, f_8, f_{10}, f_{12}, f_{13}.

Esercizio 1.3 : tutte le funzioni considerate ammettono trasformata sia in L^1 che in L^2. Poiché sono trasformabili in L^1, le trasformate sono funzioni continue. Applicando la proprietà della "moltiplicazione per t" e i suoi corollari, si ha che tutte le trasformate sono di classe C^∞.

Esercizio 1.7 : sono trasformate in L^2 le funzioni F_2 e F_4. Non lo sono le altre.

ANALISI MATEMATICA 3
A.A. 2006-2007
ESERCIZI - parte SECONDA

February 8, 2007

1 Trasformata Laplace

Esercizio 1.1 Utilizzando la formula di Bromwich-Mellin e la teoria dei residui, calcolare le antitrasformate di Laplace delle seguenti funzioni razionali:

$$
\begin{aligned}
F_1(s) &= \frac{1}{s^2+4s+5};\ F_2(s) = \frac{1}{s^2+4s+3};\\
F_3(s) &= \frac{1}{s^3+2s^2+s};\ F_4(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-2)(s^2+4)};\\
F_5(s) &= \frac{1}{(s-1)^2(s+2)};\qquad F_6(s) = \frac{s^2+2s-1}{s^3-2s^2+2s-1}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 1.2 Quale o quali delle seguenti funzioni è la trasformata di Laplace di una funzione di classe Λ?

$$
\begin{aligned}
G_1(s) &= \frac{s^2+4}{s^2-4};\ G_2(s) = \frac{s^2+4}{s^2-4s};\ G_3(s) = \frac{s+4}{s^2-4};\\
G_4(s) &= \frac{s^2+4}{s^3-4};\ G_5(s) = \frac{s^3+4s}{s^2-4}; G_6(s) = \frac{s^4+4}{s^2-4s};\\
G_7(s) &= \frac{s}{s^4-4};\ G_8(s) = \frac{4}{s^2-4};\ G_9(s) = \frac{s^4+4s^2}{s^3-4}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 1.3 - Si considerino le seguenti funzioni. Quale o quali è di classe Λ? (Si assuma che tali funzioni sono nulle per $t < 0$)

$$\begin{array}{ll} f_1(t) = e^{-t^2}; & f_2(t) = t^7 + 14t^6; \\ f_3(t) = t\cos t; & f_4(t) = e^t \cos t^2; \\ f_5(t) = e^{t^2}\cos t; & f_6(t) = t^{-4}. \end{array}$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 21 & \text{se } t > 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$
$$g_2(t) = \begin{cases} e^t \sin t & \text{se } t > 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$
$$g_3(t) = \begin{cases} t^{-4} & \text{se } t > 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Esercizio 1.4 - Si calcoli l'ascissa di convergenza per ciascuna delle funzioni di cui all'Esercizio 1.1.

Soluzioni Esercizio 1.1 Per $t > 0$ si ha:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^{-2t}\sin t \\ f_2(t) &= \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t}) \\ f_3(t) &= 1 - e^{-t} - te^{-t} \\ f_4(t) &= \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t \\ f_5(t) &= \frac{1}{9}(e^{-2t} - e^t + 3te^t) \\ f_6(t) &= 2e^t + e^{t/2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right). \end{aligned}$$

(Tali funzioni sono inoltre nulle per $t < 0$).

2 Funzioni di Bessel

Esercizio 2.1 Siano J_3 e J_8 due funzioni di Bessel. Calcolare l'espressione

$$J_3(5) + J_{-3}(5) + J_8(1) - J_{-8}(1).$$

Esercizio 2.2 Siano J_n le funzioni di Bessel. Stabilire quale delle seguenti uguaglianze è corretta

$$2J_3'(2) - 3J_{-3}(2) = 3J_2(2)$$
$$2J_3'(2) - 3J_{-3}(2) = 2J_2(2)$$
$$2J_3'(2) - 3J_{-3}(2) = 2J_3(2)$$

Esercizio 2.3 Calcolare

$$3\Gamma(4/3) - \Gamma(1/3) + \Gamma(1),$$

dove Γ è la funzione gamma euleriana.

Esercizio 2.4 Si consideri la funzione Γ euleriana. Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + 1 = 2\Gamma(1)$$
$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + 2\Gamma(2) = 1$$
$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \Gamma(3) = 2\Gamma(1)$$

Esercizio 2.5 Siano J_n e Y_n le funzioni di Bessel di prima e seconda specie. Si stabilisca se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta o errata.

i) - la funzione Y_n è oscillante;

ii) - Per ogni n intero positivo $\exists M_n > 0$ tale che $Y_n(x) > M_n$ se x è sufficientemente grande;

iii) - Sia n non intero. le tre funzioni J_n, J_{-n}, Y_n sono linearmente indipendenti.

3 Oscillazione

Esercizio 3.1 Stabilire quale delle seguenti equazioni è oscillante e quale nonoscillante

$$y'' - 7y' + (x^2 - 1)e^{7x}y = 0$$
$$y'' + 7xy' + (1 - x^2)y = 0$$
$$y'' + \frac{1}{x}y' + 4y = 0$$
$$y'' + 5xy' - 4xy = 0$$
$$y'' + \frac{3 - x}{x + 3}y = 0$$
$$y'' + \frac{x^3 - 3x - 1}{x(x^2 + 9)}y = 0$$

ANALISI MATEMATICA 3
A.A. 2006-2007
ESERCIZI - parte TERZA

March 4, 2007

1 Distribuzioni

1.1 Generalità

Sia u la funzione

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

ESERCIZIO 1.1 - Calcolare la derivata, nel senso delle distribuzioni, di:

$$\begin{array}{lll} 3e^{5t}\delta(t-1); & u(t)-u(t-8); & 3e^{5t}+e^{-4t}\delta(t); \\ (t^2+2t-6)\delta(t); & u(t)+5t\delta(t); & (t^2+2t)\delta(t+1); \\ \sin t+\delta(t); & (\sin t)\delta(t-5); & (\sin t)\delta(t). \end{array}$$

ESERCIZIO 1.2 - Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$$\begin{aligned} &\sin(2t)\cdot\delta'(t) = 0 \\ &\sin(2t)\cdot\delta'(t) = -2\delta(t) \\ &\sin(2t)\cdot\delta'(t) = \delta'(t) \\ &\sin(2t)\cdot\delta'(t) = u(t)+2\delta(t). \end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.3 - Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$$5t\delta'(t) + \delta(t) = \delta'(t)$$
$$5t\delta'(t) + \delta(t) = -4\delta(t)$$
$$5t\delta'(t) + \delta(t) = \delta'(t) + 5u(t).$$

ESERCIZIO 1.4 - Date le funzioni

$$f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{se } t \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
$$g(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in (1,2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

calcolare Df, Dg, $D[e^t f(t)]$, $D[e^{-t} g(t)]$, $e^t Df$, $e^{-t} Dg$ [Il simbolo D indica la derivata nel senso delle distribuzioni].

ESERCIZIO 1.5 - Quali tra le seguenti sono distribuzioni? In caso affermativo calcolarle.

$$\begin{array}{lll} T_1 = e^{5t}\delta'(t+1); & T_2 = u(t)\delta(t); & T_3 = t^{-4}\delta(t-4); \\ T_4 = t^2 u(t)\delta(t); & T_5 = t^2[\delta(t-1) - \delta'(t)]; & T_6 = |t|(t^2+2)\delta(t+2); \\ T_7 = (\sin t)\delta(t-4); & T_8 = (\sin t^2)\delta(t+1); & T_9 = (\sin t)u(t)\delta(t-3). \end{array}$$

1.2 Trasf. Fourier di Distribuzioni

ESERCIZIO 1.6 - Quale delle seguenti distribuzioni è una distribuzione temperata?

$$\begin{array}{lll} 2t + \sin 5t; & t\delta(t) + t\delta(t-1); & t + e^t; \\ t + e^t\delta(t); & e^{-t}\delta(t-1); & e^{-t} + \delta(t); \\ \cos t + \delta(t+4); & 1 + \cos 2t; & e^{-t} + \sin t; \\ (1 + \sin 3t)\delta(t-2); & 1 + 7t^2; & (1+7t^2)\delta(t). \end{array}$$

ESERCIZIO 1.7 - Calcolare la trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni) delle distribuzioni di cui all'Esercizio 1.6 che sono temperate.

Calcolare poi la trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni) della derivata (nel senso delle distribuzioni).

ESERCIZIO 1.8 - Data la funzione

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{se } t \in (0,4) \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si calcoli la trasformata di Fourier di Df, di tDf, di $(t-4)Df$.

ESERCIZIO 1.9 - Quale delle seguenti è una distribuzione?

$$\begin{array}{lll} (t+6)\delta(t); & e^t + e^{-t}\delta(t); & (\log t)\delta'(t); \\ \delta^2(t); & (t-4)^{-2}\delta(t+2); & (\sin 5t)\delta(t); \\ (\sin 5t)\delta'(t); & e^{-5t} - 5; & (e^{5t}+5)\delta(t). \end{array}$$

Quale delle precedenti è una distribuzione temperata? Per quelle che lo sono si calcoli la trasformata di Fourier e la trasformata di Fourier della derivata (nel senso delle distribuzioni).

1.3 Trasf. Laplace di distribuzioni

Esercizio 1.10 Calcolare le antitrasformate di Laplace (nel senso delle distribuzioni) delle seguenti funzioni razionali:

$$F_1(s) = \frac{s^2-1}{s^2+4s+5}; \; F_2(s) = \frac{s^2+1}{s^2+5s+6};$$
$$F_3(s) = \frac{s^3-1}{s^3+7s^2+6s}; \; F_4(s) = \frac{s(s+2)^2}{(s+1)(s-2)}.$$

Esercizio 1.11 Date le distribuzioni

$$T_1 = e^t\delta(t); \; T_2 = e^{-t}\delta'(t-1); \; T_3 = (t-e^t)\delta(t);$$
$$T_4 = (t-e^t)\delta(t-1); \; T_5 = (t-e^t)\delta'(t); T_6 = \delta(t-1) + \delta'(t-2),$$

calcolarne la derivata DT (nel senso delle distribuzioni). Calcolare poi la trasformata di Fourier e la trasformata di Laplace di DT.