ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2005-2006
Traccia della lezione del 18 gennaio 06

January 18, 2006

1 Richiami sul concetto di integrale improprio

Sia f una funzione reale di variabile reale, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile in ogni intervallo limitato e chiuso dell'asse reale. Se, **comunque** siano scelti $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, esiste finito il limite

$$\lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

e tale limite è indipendente da a, b, allora si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =_{def} \lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

e diremo che f è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, o, equivalentemente che l'integrale di f, esteso a $\mathbb{R}$, converge. In caso contrario diremo che f non è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ o semplicemente che f non è integrabile in $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, che l'integrale di f, esteso a $\mathbb{R}$, non converge.

Si chiama poi *valore principale dell'integrale improprio* (in $\mathbb{R}$), e si indica con

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

il limite

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =_{def} \lim_{L\to+\infty} \int_{-L}^{+L} f(x)dx. \tag{2}$$

La relazione tra le due definizioni (1), (2) è, ovviamente, la seguente: se f è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, allora il valore principale dell'integrale improprio esiste finito e coincide con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, ossia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \implies v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M.$$

Ovviamente NON vale il viceversa, ossia il valore principale dell'integrale improprio può essere finito, ma l'integrale (1) può non convergere, i.e.

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \;\not\Rightarrow\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M\ .$$

Ad esempio per la funzione

$$f(x) = \frac{x^5}{x^4+1}$$

si ha

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^5}{x^4+1}dx = 0$$

in quanto la funzione è dispari, ma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ovviamente non converge (f è illimitata!).

2 Spazi normati

Sia V uno spazio vettoriale complesso. Si chiama *norma in V* ogni applicazione $||\cdot||$

$$||\cdot|| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

$\|\|f\|\| > 0$	se	$f \in V, f \not\equiv 0,$
$\|\|\alpha f\|\| = \|\alpha\|\ \|\|f\|\|$	se	$\alpha \in \mathbb{C}, f \in V$
$\|\|f+g\|\| \leq \|\|f\|\| + \|\|g\|\|$	se	$f, g \in V$

e lo spazio V si chiama *spazio normato.*

Ad esempio, se V è lo spazio delle funzioni continue in $[0,1]$, ossia $V = C[0,1]$, allora è immediato verificare che sono norme in $C[0,1]$ le seguenti ($f \in C[0,1]$):

$$||f||_1 = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$$
$$||f||_2 = \int_0^1 |f(t)|dt$$
$$||f||_3 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

- Proprietà:

Ogni spazio normato V è anche uno spazio metrico, con distanza d data da

$$d(f,g) = ||f-g|| \qquad\qquad (f,g \in V)$$

In riferimento all'esempio di sopra, allora in $C[0,1]$ è possibile considerare le tre metriche ($f,g \in C[0,1]$):

$$d_1(f,g) = ||f-g||_1 = \max_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)|$$
$$d_2(f,g) = ||f-g||_2 = \int_0^1 |f(t)-g(t)|dt$$
$$d_3(f,g) = ||f-g||_3 = \left(\int_0^1 |f(t)-g(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

2.1 Gli spazi $\mathbf{L}^p$

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile reale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e sia p un numero reale $p \geq 1$.

Scriveremo $f \in L^p(\mathbb{R})$, se $|f|^p$ è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, ossia se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt < \infty.$$

In particolare se $p = 1, f$ si dice *sommabile* e in tal caso scriveremo $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Se $p = 2$, f si dice *a quadrato sommabile* e scriveremo $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Gli spazi $L^p(\mathbb{R})$ sono spazi normati (e quindi anche metrici).

In particolare la norma e la distanza in $L^1(\mathbb{R})$ sono date, rispettivamente, da $(f, g \in L^1(\mathbb{R}))$

$$||f||_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$$
$$d_{L^1}(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|dt$$

Per quanto riguarda poi $L^2(\mathbb{R})$, la norma e la distanza sono date invece da $(f, g \in L^2(\mathbb{R}))$

$$||f||_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$
$$d_{L^2}(f,g) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2005-2006
Traccia della lezione del 19 gennaio 06

January 19, 2006

1 Trasformata di Fourier in $\mathbf{L}^1$

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile **reale** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sommabile, ossia $f \in L^1(\mathbb{R})$, i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty;$$

ciò posto, si chiama *Trasformata di Fourier (in L^1)* di f la funzione F definita da

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \tag{1}$$

dove ω è un numero reale fissato.

- La definizione (1) è lecita, nel senso che l'integrale in (1) converge per ogni ω reale.
- Utilizzando le formule di Eulero si ha:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t \; dt}_{(*)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t \; dt}_{(+)}$$

  $(*)$ si chiama *Trasformata coseno di Fourier* e $(+)$ *Trasformata seno di Fourier.*

- Formula della antitrasformata : vale il seguente teorema

Teorema *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si supponga inoltre che f sia sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo chiuso $[-L, L]$, qualunque sia L. Ciò premesso si ha*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

2 Prime proprietà della trasformata di Fourier in $\mathbf{L}^1$

Indichiamo con $\mathfrak{F}$ l'operatore che associa a $f(\in L^1(\mathbb{R}))$ la sua trasformata di Fourier F, ossia $\mathfrak{F}\{f\} = F$. Ciò premesso si ha:

Teorema. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; allora la sua trasformata F è una funzione continua e infinitesima per $|\omega| \to \infty$.*

Corollario. *La trasformata di Fourier F di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ è una funzione limitata per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.*

Ad esempio non sono trasf. di Fourier (di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$!) le funzioni

$$F_1(\omega) = \frac{\omega^2 + 12}{\omega^2 + 4}; F_2(\omega) = \frac{\omega + 12}{\omega^2 - 4}.$$

La trasformata di Fourier F di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$ puo' non essere derivabile. Esempi in tal senso saranno visti nelle prossime lezioni. Se, all'ipotesi $f \in L^1(\mathbb{R})$ aggiungiamo anche $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$, allora la risposta è affermativa, come segue subito dal seguente risultato.

Teorema *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$; allora la trasformata di Fourier F di f è derivabile e si ha:*

$$\mathfrak{F}\{tf(t)\} = j\frac{d}{d\omega}F(\omega).$$

Si osservi che tale teorema fornisce solo una condizione sufficiente. Si osservi inoltre che le due ipotesi "$f \in L^1(\mathbb{R})$" e "$tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$" sono tra loro indipendenti. Infatti, ad esempio, per la funzione f, data da

$$f(t) = \begin{cases} 1/t^2 & \text{se } t > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha $f \in L^1(\mathbb{R})$" *e* "$tf(t) \notin L^1(\mathbb{R})$, mentre per la funzione g, data da

$$g(t) = \begin{cases} 1/t & \text{se } t \in (0,1) \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha "$g \notin L^1(\mathbb{R})$" *e* "$tg(t) \in L^1(\mathbb{R})$" .

In particolare dal teorema precedente seguono i seguenti:

Corollario *Sia* $t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ *per* $n = 0, 1, ..., N$. *Allora la trasformata di Fourier* F *di* f *è una funzione di classe* $C^N(\mathbb{R})$.

Corollario *Sia* f *a supporto compatto, i.e. esiste un intervallo compatto* $[a, b]$ *tale che* $f(t) = 0$ *se* $t \notin [a, b]$. *Sia* f *assolutamente integrabile in* $[a, b]$. *Allora* f *è trasformabile secondo Fourier e la sua trasformata* F *è una funzione di classe* $C^\infty(\mathbb{R})$.

3 Esempi

▲ **Impulso Rettangolare** - Sia

$$f(t) = \begin{cases} M \text{ se } |t| \le L \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases};$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F(\omega) = 2ML\text{sink}(\omega L) = \begin{cases} 2M\omega^{-1}\sin(\omega L) & \text{se } \omega \neq 0 \\ \\ 2ML & \text{se } \omega = 0 \end{cases}.$$

▲ **Impulso Triangolare** - Sia

$$f(t) = \begin{cases} M(t+1) & \text{se } -1 \le t < 0 \\ M(1-t) & \text{se } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F(\omega) = \frac{2M(1-\cos\omega)}{\omega^2}\text{per } \omega \neq 0, F(0) = M.$$

ossia

$$F(\omega) = M\left(\mathrm{sink}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2$$

▲ **Impulso esponenziale** - Sia

$$f(t) = \exp(-|t|);$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

▲ **Impulso gaussiano** - Sia

$$f(t) = \exp(-t^2/2);$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\exp((-\omega^2/2).$$

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2005-2006
Traccia della lezione del 20 gennaio 06

January 20, 2006

1 Altre proprietà della trasformata di Fourier

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e sia F la sua trasformata di Fourier. Allora:

1. S*e f è pari, allora F è pari.*
2. S*e f è dispari; allora F è dispari.*
3. *Se f è reale, allora $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$.*
4. *Se f è reale e pari, allora F è reale e pari.*

Se inoltre f è sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso $[-L, L]$, allora valgono anche le relazioni inverse:

1. S*e F è pari, allora f è pari.*
2. S*e F è dispari; allora f è dispari.*
3. *Se F è reale, allora $f(-t) = \overline{f(t)}$.*
4. *Se F è reale e pari, allora f è reale e pari.*

2 Derivazione

Teorema (Derivazione) *Sia* $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$,$f' \in L^1(\mathbb{R})$. *Allora*

$$\mathfrak{F}\left\{f'\right\} = j\omega\mathfrak{F}\left\{f\right\}.$$

Corollario *Sia* $f \in C^N(\mathbb{R})$ *e* $f \in L^1(\mathbb{R})$,$f' \in L^1(\mathbb{R}), ...,f^{(N)} \in L^1(\mathbb{R})$. *Allora*

$$\mathfrak{F}\left\{f^{(N)}\right\} = (j\omega)^N\mathfrak{F}\left\{f\right\}.$$

In particolare, se $f \in C^2(\mathbb{R})$ *e* $f \in L^1(\mathbb{R})$,$f' \in L^1(\mathbb{R})$,$f'' \in L^1(\mathbb{R})$, *allora*

$$\mathfrak{F}\left\{f''\right\} = -\omega^2\mathfrak{F}\left\{f\right\}.$$

Si osservi che l'ipotesi "$f \in C^1(\mathbb{R})$" nel precedente Teorema non può essere tralasciata, come mette in luce l'esempio, visto prima, dell'impulso rettangolare.

3 Integrabilità della trasformata

Ricordiamo la formula dell'antitrasformata:

Teorema *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *e si supponga inoltre che* f *sia sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso* $[-L, L]$. *Ciò premesso si ha*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{1}$$

Se $F \in L^1(\mathbb{R})$ allora l'integrale in (1) converge non solo nel senso del valore principale, ma anche in senso generalizzato (o improprio). In altre parole, se $F \in L^1(\mathbb{R})$ la formula dell'antitrasformata diviene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{2}$$

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ puo' accadere che la sua trasformata $F = \mathfrak{F}\left\{f\right\}$ non appartenga a $L^1(\mathbb{R})$, come illustra, ad esempio il caso dell'impulso rettangolare. Pertanto, come si dice, lo spazio L^1 non è chiuso rispetto all'operatore "trasformata di Fourier".

Condizioni sufficienti affinchè la trasformata appartenga a $L^1(\mathbb{R})$ si ottengono come immediata conseguenza del teorema della derivazione. Si hanno infatti i seguenti:

Corollario 1 *Sia* $f \in C^n(\mathbb{R})$*,*$f.\ f', ..., f^{\,(n)} \in L^1(\mathbb{R})$*;allora* $F = o(\omega^{-n})$ *per* $|\omega| \to \infty$*, ossia*

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \frac{F(\omega)}{\omega^{-n}} = 0$$

dove $F = \mathfrak{F}\{f\}$.

Il significato di tale Corollario è il seguente: ”*la trasformata di Fourier* F *di una funzione* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *tende a zero (per* $|\omega| \to +\infty$*) tanto più velocemente, quanto più* f *è ”liscia” (e con derivate in* $L^1(\mathbb{R})$*)”*

Corollario 2 *Sia* $f \in C^2(\mathbb{R})$*,*$f.\ f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$*;allora* $F \in L^1(\mathbb{R})$ *(e quindi nella formula della antitrasformata si può omettere la sigla v.p.,in quanto, in tal caso, (1) e (2) coincidono.*

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2005-2006
Traccia della lezione del 25 gennaio 06

January 25, 2006

1 Trasformata di Fourier in L^2

1.1 Generalità

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile **reale** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Tale funzione si dice *a quadrato sommabile*, e si scrive $f \in L^2(\mathbb{R})$, se $|f|^2$ è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, ossia se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Esistono funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R})$, ma non a $L^1(\mathbb{R})$ e viceversa. Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t^{-1} & \text{se } t > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $f \notin L^1(\mathbb{R})$. Invece per la funzione

$$g(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $g \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \notin L^2(\mathbb{R})$. Chiaramente poi esistono funzioni appartenenti sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$; ad esempio la funzione

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$, ossia $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

1.2 Il Teorema di Plancherel e la trasformata in L^2

Vale il seguente:

Teorema di Plancherel - *Sia* $f \in L^2(\mathbb{R})$. *Allora:*
1) L'integrale (nel senso del valore principale)

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

esiste per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, *eccetto, al più, un insieme di misura nulla.*
Posto allora

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

si ha inoltre:
2) $F \in L^2(\mathbb{R})$
3) Vale la formula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

4) Vale l'identità:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

COMMENTI : la proprietà 4) è detta anche principio di conservazione della norma (o dell'energia).
La proprietà 1) suggerisce poi la seguente definizione.
DEFINIZIONE - Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$;si chiama *Trasformata di Fourier in* L^2, la funzione F definita da

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{1}$$

OSSERVAZIONE : se inoltre $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora l'integrale in (1) coincide con l'integrale improprio, ossia la trasformata di Fourier in L^2 **coincide** con la trasformata di Fourier in L^1,vista in precedenza. La definizione precedente è pertanto un'estensione del concetto di trasformata di Fourier e, ovviamente, assume rilevanza per quelle funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R})$ e non a $L^1(\mathbb{R})$, ossia per quelle funzioni per le quali la trasformata considerata nella precedente lezione non è definita.

Ciò posto, la proprietà 3) del teorema di Plancherel diviene la formula dell'antitrasformata, formula che, a differenza di quanto accade in L^1, vale sotto le stesse ipotesi che assicurano l'esistenza della trasformata.

1.3 Proprietà di simmetria

Dal teorema di Plancherel segue l'importante proprietà della trasformata in L^2 :

Teorema (Proprietà di simmetria) *Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ e sia $\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega)$ la sua trasformata. Allora $F \in L^2(\mathbb{R})$ e*

$$\mathfrak{F}\{\mathfrak{F}\{f\}\} = 2\pi f(-\omega).$$

In particolare, se f è inoltre pari, allora la trasformata della trasformata di Fourier di f coincide con f, a meno di un fattore 2π.

Conseguenze:

♦ Poiché la trasformata dell'impulso rettangolare

$$f(t) = \begin{cases} M \text{ se } |t| \leq L \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases};$$

è la funzione

$$F(\omega) = 2ML\mathrm{sink}(\omega L),$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$g(t) = 2ML\mathrm{sink}(Lt)$$

è

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = G(\omega) = \begin{cases} 2\pi M \text{ se } |\omega| \leq L \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}.$$

♦ Poiché la trasformata dell'impulso esponenziale

$$f(t) = \exp(-|t|);$$

è la funzione

$$F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2},$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$g(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

è

$$\mathfrak{F}\left\{g(t)\right\} = G(\omega) = 2\pi \exp(-|\omega|).$$

2 Proprietà dell'operatore "trasformata di Fourier"

1. **Linearità** - *Siano* $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$;*allora:*

$$\mathfrak{F}\left\{c_1 f_1 + c_2 f_2\right\} = c_1 \mathfrak{F}\left\{f_1\right\} + c_2 \mathfrak{F}\left\{f_2\right\}, \qquad c_i \in \mathbb{C}.$$

2. **Traslazione in frequenza -** *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R})$;*allora:*

$$\mathfrak{F}\left\{f(t)e^{j\gamma t}\right\} = F(\omega - \gamma), \qquad \gamma \in \mathbb{R}.$$

3. **Traslazione temporale** - *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R})$;*allora:*

$$\mathfrak{F}\left\{f(t-A)\right\} = e^{-jA\omega} F(\omega), \qquad A \in \mathbb{R}.$$

4. **Omotetia -** *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R})$;*allora:*

$$\mathfrak{F}\left\{f(At)\right\} = \frac{1}{|A|} F\left(\frac{\omega}{A}\right), \qquad A \in \mathbb{R}, A \neq 0.$$

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2005-2006
Traccia della lezione del 26 gennaio 06

January 26, 2006

1 Proprietà della trasformata in $\mathbf{L}^2$

Per quanto concerne le proprietà di $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$,quando $f \in L^2(\mathbb{R})$, continuano a valere le proprietà viste nelle lezioni precedenti per la trasformata in L^1. Precisamente continuano a valere le proprietà di linearità, dell'omotetia, della traslazione temporale e traslazione in frequenza, viste la lezione scorsa. Inoltre:

1. *f è pari [dispari] se e solo se F è pari [dispari];*

2. *f è reale e pari se e solo se F è reale e pari.*

Osserviamo infine che, a differenza di quanto accade per la trasformata in L^1, se $f \in L^2(\mathbb{R})$, allora $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$ può essere discontinua e non infinitesima (per $|\omega| \to +\infty$)

2 Il caso razionale

Teorema (trasformata) - *Sia f razionale. Allora f è trasformabile secondo Fourier in L^2 se e solo se f è propria e priva di poli reali. Indicati con $s_1, ...s_N$ i poli di f, si ha:*

$$\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega) = \begin{cases} 2\pi j \sum_{\mathrm{Im}\ s_i>0} \mathrm{Res}\,[f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega < 0 \\ \\ -2\pi j \sum_{\mathrm{Im}\ s_i<0} \mathrm{Res}\,[f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega > 0 \end{cases}.$$

Teorema (antitrasformata) - *Sia* F *razionale. Allora* F *è trasformabile secondo Fourier in* L^2 *se e solo se* F *è propria e priva di poli reali. Indicati con* $s_1, ...s_N$ *i poli di* F *, l'antitrasformata* f *di* F *è data da:*

$$f(t) = \begin{cases} -\,j \sum_{\mathrm{Im}\ s_i<0} \mathrm{Res}\,[F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t < 0 \\ \\ j \sum_{\mathrm{Im}\ s_i>0} \mathrm{Res}\,[F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

Entrambi i teoremi precedenti si provano utilizzando la teoria dei Residui e il Lemma di Jordan nella versione sotto riportata, come è stato dettagliatamente illustrato a lezione.

Lemma di Jordan - *Sia* $g(s)$ *una funzione complessa, analitica per* $|s|$ *grande e tale che* $\lim_{s\to\infty} g(s) = 0$*. Allora:*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} g(s)e^{jms}ds = 0$$

se:

i) C_R *è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio* R*, contenuta nel semipiano* $\mathrm{Im}\ s > 0$ *e* m *è un numero reale positivo (vedi figura 1);*

oppure se:

ii) C_R *è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio* R*, contenuta nel semipiano* $\mathrm{Im}\ s < 0$ *e* m *è un numero reale negativo (vedi figura 2).*

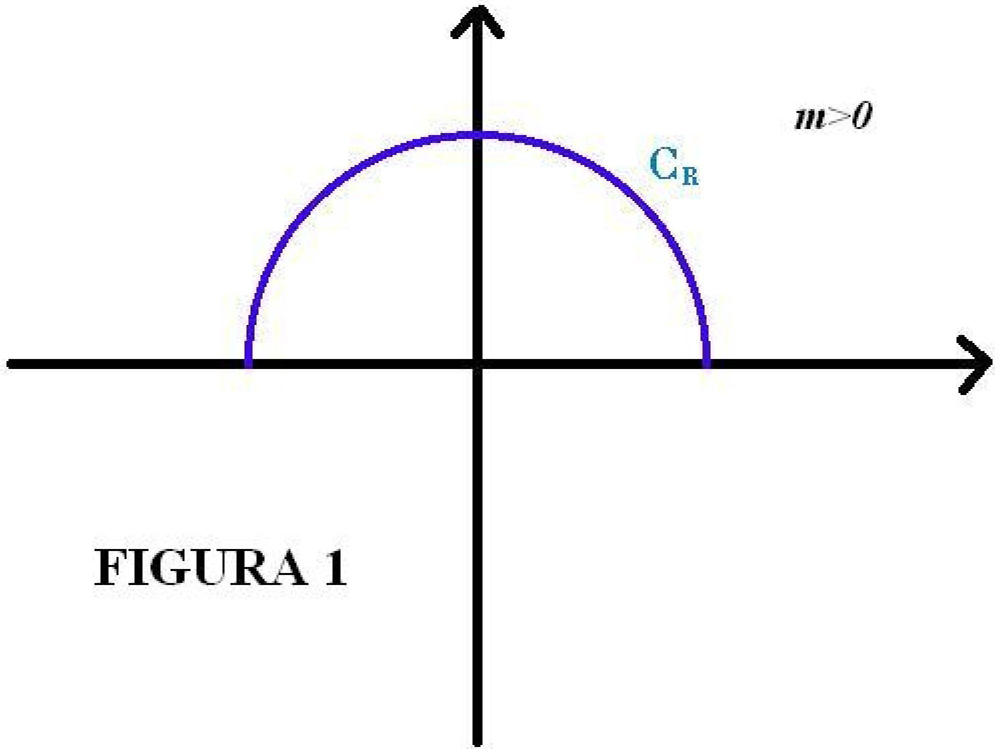

FIGURA 1

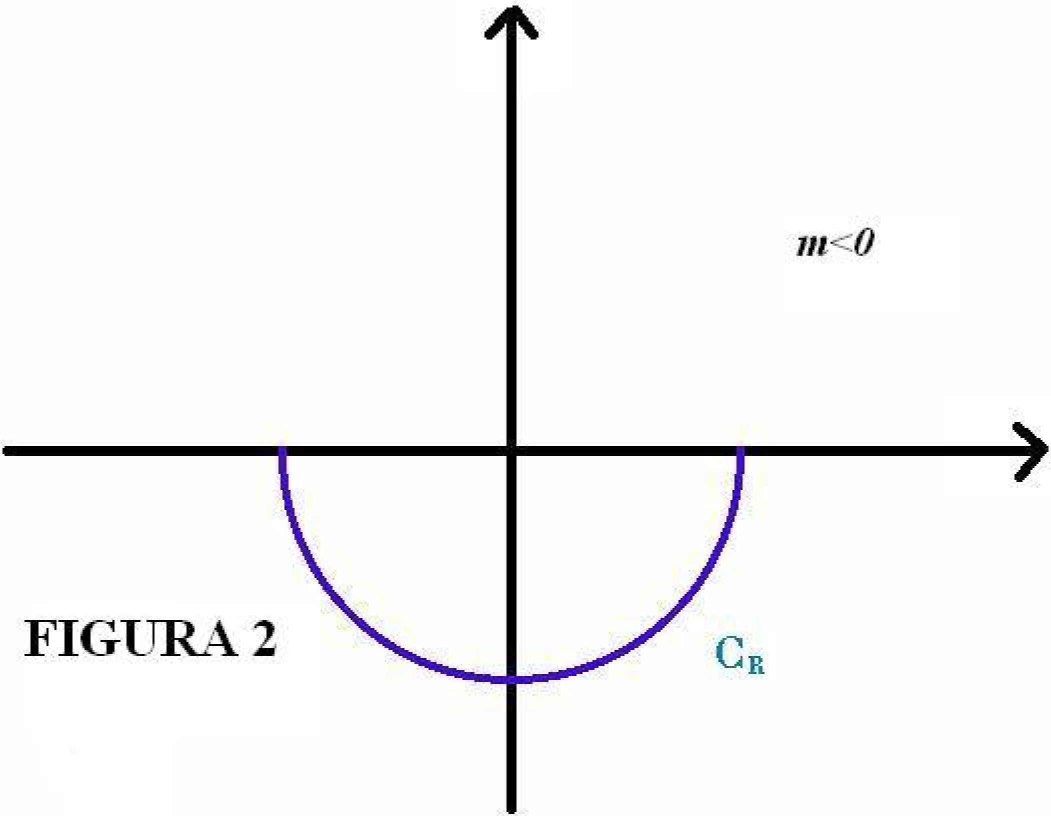

FIGURA 2

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2005-2006
Traccia della lezione del 1 febbraio 06

February 1, 2006

1 Il Teorema del campionamento

Un'importante applicazione della trasformata di Fourier nell'ambito della trasmissione di segnali è data dal Teorema di Shannon (o del campionamento) : si veda Cap. 3.14 in M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

2 Altre proprietà dell'operatore "trasformata di Fourier"

Nelle lezioni scorse è stata vista la proprietà:

1. **Derivazione -** *Sia* $f \in C^1(\mathbb{R})$,$f.f' \in L^1(\mathbb{R})$;*allora*

$$\mathfrak{F}\left\{f'\right\} = j\omega\mathfrak{F}\left\{f\right\}.$$

Altre proprietà sono le seguenti:

2. **Integrazione -** Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dove $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\left\{f\right\}$, si ha

$$\mathfrak{F}\left\{g\right\} = \frac{F(\omega)}{j\omega}.$$

Poiché la trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$ è una funzione continua per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, dalla proprietà precedente si ha anche il

Corollario *Siano* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, *dove* $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$. *Posto* $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, *si ha*

$$\lim_{\omega \to 0} F(\omega) = 0.$$

3. **Convoluzione -** Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Si chiama prodotto di convoluzione di f e g, e si indica con $f * g$, la funzione

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Tale definizione è lecita, nel senso che è possibile provare che

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Teorema - *Siano* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. *Posto* $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}, G(\omega) = \mathfrak{F}\{g\}$, *si ha*

$$\mathfrak{F}\{f * g\} = F(\omega)G(\omega).$$

Se **inoltre** f, g sono nulle sul semiasse negativo, ossia se per $t < 0$ si ha

$$f(t) = g(t) = 0,$$

allora è immediato verificare che (per $t > 0$)

$$(f * g)(t) = \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{1}$$

Il prodotto di convoluzione interviene nella risolubilità di equazioni (o sistemi) differenziali lineari a coefficienti costanti. A titolo di esempio, per l'equazione lineare scalare

$$y' = cy + b(t), \tag{2}$$

dove c è una costante reale e b una funzione continua (a tratti) in $[0, \infty)$ si ha

$$y(t) = e^{ct}y(0) + e^{ct} * b(t). \tag{3}$$

Si osservi che la funzione e^{ct} è una soluzione dell'equazione lineare omogenea

$$x'(t) = cx(t); \tag{4}$$

precisamente è la soluzione x di (4) tale che $x(0) = 1$. La formula (3) mette in luce che per la risolubilità di (2) è sufficiente allora determinare tale soluzione. Così, ad esempio, tutte le soluzioni di

$$y' + 7y = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

sono date da

$$y(t) = e^{-7t}y(0) + e^{-7t} * \frac{2t}{t^2 + 1}.$$

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2005-2006
Traccia della lezione del 2 febbraio 06

February 2, 2006

1 La convoluzione

Nella lezione scorsa si è definito il *prodotto di convoluzione* di f e g, con $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, nel modo seguente

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Se **inoltre** f, g sono nulle sul semiasse negativo, ossia se per $t < 0$ si ha

$$f(t) = g(t) = 0,$$

allora è immediato verificare che per $t > 0$ si ha

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{1}$$

Si è poi osservato che il prodotto di convoluzione (1) interviene nella risolubilità di equazioni differenziali lineari scalari a coefficienti costanti.

Una circostanza analoga si verifica per la risolubilità di sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti.

Si consideri, ad esempio, il sistema

$$\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{b(t)} \tag{2}$$

dove

$$\underline{y(t)} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdots\cdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \underline{b(t)} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \cdots\cdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

e $A = (a_{i,j})$ è una matrice costante $n \times n$. E' possibile provare che tutte le soluzioni del sistema sono date dalla formula

$$\underline{y(t)} = Y(t)\underline{y(0)} + Y(t) * \underline{b(t)} \tag{3}$$

dove Y è una matrice $n \times n$, le cui colonne sono soluzioni (indipendenti) del sistema omogeneo associato

$$\underline{x}' = A\underline{x}$$

e $Y(0) = I$ (I matrice identità $n \times n$). Pertanto, in virtù di (3), la risolubilità di (2) è ricondotta al calcolo della matrice Y, calcolo che può essere effettuato tramite la Trasformata di Laplace.

2 Trasformata di Laplace

2.1 Definizione

Introduzione, Preliminari, Definizione della trasformata: si veda Cap. 1.1, 1.2, 1.3 del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

2.2 Relazione con la trasf. di Fourier

Vale il seguente

Teorema. *Sia $f \in \Lambda$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza. Allora, indicata con $L[f(t)]$ la trasf. di Laplace di f, si ha*

$$L[f(t)] = \mathfrak{F}\left\{f(t)e^{-xt}\right\}, \text{ dove } x > \alpha_f. \tag{4}$$

2.3 Principali proprietà

Sia $f \in \Lambda$ e sia $F(s) = L[f(t)]$ la sua trasformata di Laplace. Allora:

- **traslazione temporale.**

$$L[f(t-A)] = F(s)e^{-As}, \text{ con } A > 0;$$

- **traslazione in frequenza (o smorzamento).**

$$L[f(t)e^{\gamma t}] = F(s-\gamma), \text{ con } \gamma \in \mathbb{C};$$

Si confrontino queste proprietà con le "corrispondenti" viste per la trasformata di Fourier, evidenziandone le analogie e differenze.

2.4 Formula di Bromwich-Mellin

Si veda Cap. 1.13.1, 1.13.2, del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

Formula di Bromwich-Mellin - *Sia $f \in \Lambda$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza. Indicata con $F(s) = L[f(t)]$ la sua trasformata di Laplace, si ha per $t > 0$*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} v.p. \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

dove $x > \alpha_f$.

Tale formula, nota anche sotto il nome di formula di Riemann-Fourier, puo' essere facilmente ottenuta dalla formula di inversione per la trasformata di Fourier e da (4).

In particolare, se F è una funzione razionale propria, utilizzando la teoria dei residui e il Lemma di Jordan, si puo' provare il seguente:

Teorema *Sia F razionale propria. Allora esiste $f \in \Lambda$ tale che $F(s) = L[f(t)]$ (i.e.F è la trasf. di Laplace di f) e per $t > 0$ si ha:*

$$f(t) = \sum_{s_i} \mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_i],$$

dove s_i rappresentano le singolarità di F.

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2005-2006
Traccia della lezione del 8 febbraio 06

February 8, 2006

1 Trasformata di Laplace

1.1 Altre proprieta'

- **derivazione.**
  Sia $f \in C^1[0,\infty)$ e $f, f' \in \Lambda$. Allora
  $$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0+);$$
- **integrazione.**
  $$L[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{1}{s}L[f(t)].$$
  Si veda anche Cap. 1.9, e 1.10 Corollario 1.4 , in M. Marini "*Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche*", Edizioni Cedam, 1999.

1.2 Il caso razionale

Nella lezione scorsa si è visto il seguente:

Teorema *Sia F razionale propria. Allora esiste $f \in \Lambda$ tale che $F(s) = L[f(t)]$ (i.e. F è la trasf. di Laplace di f) e per $t > 0$ si ha:*
$$f(t) = \sum_{s_i} \mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_i],$$

dove s_i rappresentano le singolarità di F.

In generale vale il seguente:

Teorema *Sia $F = F(s)$ una funzione razionale complessa. Allora F è la trasformata di Laplace di una funzione $f \in \Lambda$ SE E SOLO SE f è propria.*

Così, ad esempio, sono trasformate di Laplace di funzioni di classe Λ le funzioni razionali

$$F_1(s) = \frac{s^3 + 2s + 9}{s^4 + 7s^3 + 7s + 2}, F_2(s) = \frac{3s + 5}{s^3 + 2s^2 + 7s + 4},$$

mentre non lo sono le funzioni

$$F_3(s) = \frac{s^3 + 8}{7s^3 + 7s + 2}, F_4(s) = \frac{3s^5 + 5}{s^2 + 3s + 9}.$$

2 Le distribuzioni

2.1 Definizione

Indichiamo con L^1_{loc} lo spazio vettoriale

$$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ assolutamente integrabili in ogni compatto di } \mathbb{R}\};$$

vogliamo costruire un'estensione di tale spazio.

Ricordiamo che una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *a supporto compatto* se esiste un intervallo compatto (i.e. limitato e chiuso) $[a, b]$ dell'asse reale tale che $\varphi(t) = 0$ se $t \notin [a, b]$. L'intervallo $[a, b]$, all'esterno del quale φ è nulla, si chiama *supporto di φ*. E' evidente che la funzione φ è univocamente individuata non appena siano noti i valori assunti da φ sul supporto.

Si consideri poi lo spazio vettoriale D formato da tutte le funzioni reali (di variabile reale) infinitamente derivabili e a supporto compatto, ossia

$$D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\}.$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni test* ed è possibile definire in tale spazio una nozione di convergenza (vedi Appendice).

Si osservi poi che il supporto dipende dalla funzione φ considerata. Ad esempio la funzione α data da

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-t^2)} & \text{se } |t| < 1 \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

appartiene a D ed il suo supporto è $[-1, 1]$. Analogamente la funzione β data da

$$\beta(t) = \begin{cases} e^{-1/(4-t^2)} & \text{se } |t| < 2 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a D ed il suo supporto è $[-2, 2]$.

Ciò premesso si chiama *spazio delle distribuzioni* l'insieme formato da tutti i funzionali (vedi Appendice) lineari e continui definiti su D. Tale spazio si indica con il simbolo $\mathfrak{D}$ ossia

$$\mathfrak{D} = \{T : D \to \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Pertanto $T \in \mathfrak{D}$ se :
1) T è un funzionale, i.e. $T : D \to \mathbb{R}$
2) T è lineare, ossia

$$T(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1T(\varphi_1) + c_2T(\varphi_2), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D.$$

3) T è continuo, ossia se $\{\varphi_n\} \xrightarrow{D} \varphi$, allora $\{T(\varphi_n)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi)$.

2.2 Esempi

Sono elementi di $\mathfrak{D}$ (e quindi distribuzioni) i seguenti funzionali (dove φ indica una generica funzione di D):

1. $T_{\sin t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \sin t \; dt$
2. $T_{t^3}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \; t^3 \; dt$
3. $T_{e^t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \; e^t \; dt$.

   In generale, **fissata** una funzione $f \in L^1_{loc}$, sono elementi di $\mathfrak{D}$ i funzionali del tipo

4. $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ \varphi(t)\ dt$,

   dove φ indica, come prima, una generica funzione di D.

   Altre distribuzioni (i.e. elementi di $\mathfrak{D}$) sono poi i funzionali

5. $\Delta_0(\varphi) = \varphi(0)$

6. $\Delta_a(\varphi) = \varphi(a)$

   dove a è un generico numero reale e φ è una generica funzione di D.

Usualmente i funzionali Δ_0, Δ_a vengono indicati con i simboli $\delta(t)$, $\delta(t-a)$.

In riferimento all'Esempio 1., il valore $T_{\sin t}(\varphi)$, assunto dal funzionale T, viene indicato con

$$T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle\,.$$

Il simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si chiama *crochet;* e la scrittura $\langle \sin t, \varphi(t) \rangle$ si legge *crochet tra* $\sin t$ *e* φ.

Pertanto le distribuzioni sopra definite negli Esempi 1., 2., 3., 4. si indicano anche con i simboli

1. $T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \sin t\ dt$

2. $T_{t^3}(\varphi) = \langle t^3, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\ t^3\ dt$

3. $T_{e^t}(\varphi) = \langle e^t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\ e^t\ dt$.

4. Per ogni $f \in L^1_{loc}$ fissata

$$T_f(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt. \tag{1}$$

   Analogamente per le distribuzioni $\delta(t)$ e $\delta(t-a)$ si ha

5.
$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(0)$$

6.
$$\langle \delta(t-a), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(a).$$

2.3 Le distribuzioni come estensione dello spazio L^1_{loc}

Mostriamo che lo spazio $\mathfrak{D}$ è una estensione dello spazio

$$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ assolutamente integrabili in ogni compatto di } \mathbb{R}\}.$$

Ricordiamo che in tale spazio due funzioni f, g, coincidono se

$$f(t) = g(t), \qquad \text{eccetto un insieme di misura nulla.}$$

Ciò premesso si ha il seguente:

Teorema - *Siano $f, g \in L^1_{loc}$. Se*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\ \varphi(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)\ \varphi(t)\ dt \qquad \forall \varphi \in D \tag{2}$$

(ossia, usando le notazione con il crochet, se

$$\langle f(t), \varphi(t) \rangle = \langle g(t), \varphi(t) \rangle \qquad \forall \varphi \in D\ ) \tag{3}$$

allora f e g coincidono in L^1_{loc}. Vale poi, ovviamente, il viceversa, ossia se f e g coincidono in L^1_{loc}, allora (2) [i.e.(3)] è soddisfatta.

Da questo risultato ne segue che le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}$, definite tramite funzioni di L^1_{loc}, ossia le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}$ il cui crochet è dato da (1) sono *"tante quanti gli elementi di L^1_{loc}"*.

In altre parole se indichiamo con $\mathfrak{D}^*$ il sottoinsieme di $\mathfrak{D}$ formato da tutte le distribuzioni il cui crochet è dato da (1), ossia

$$\mathfrak{D}^* = \left\{ T \in \mathfrak{D}\ : \exists f \in L^1_{loc} : T(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t) dt \qquad \forall \varphi \in D \right\},$$

per il Teorema precedente il sottospazio $\mathfrak{D}^*$ è in corrispondenza biunivoca con L^1_{loc}, ossia

$$\mathfrak{D}^* \sim L^1_{loc}$$

Quindi lo spazio delle distribuzioni $\mathfrak{D}$ può essere interpretato come una estensione di L^1_{loc}.

3 Appendice

3.1 Convergenza in D

La nozione di convergenza nello spazio D delle funzioni test si definisce nel seguente modo: diremo che una successione $\{\varphi_n\}$ converge a φ se:

1) $\varphi_n, \varphi \in D$;
2) esiste un intervallo compatto I tale che $\varphi_n(t) = \varphi(t) = 0$ se $t \notin I$;
3) la successione $\left\{\varphi_n^{(i)}\right\}$ converge uniformemte a $\varphi^{(i)}$ in $\mathbb{R}$ per $i = 0, 1, 2, 3...$
ossia $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon)$: per ogni $n > n(\varepsilon)$ si ha $|\varphi_n^{(i)}(t) - \varphi_n^{(i)}(t)| < \varepsilon\ \forall t \in I$
- la successione $\{\varphi_n\}$ converge uniformemte a φ in $\mathbb{R}$, i.e.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon)$: per ogni $n > n(\varepsilon)$ si ha $|\varphi_n(t) - \varphi_n(t)| < \varepsilon\ \forall t \in I$
- la successione $\{\varphi'_n\}$ converge uniformemte a φ' in $\mathbb{R}$,
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu(\varepsilon)$: per ogni $n > \nu(\varepsilon)$ si ha $|\varphi'_n(t) - \varphi'_n(t)| < \varepsilon\ \forall t \in I$
- la successione $\{\varphi''_n\}$ converge uniformemte a φ'' in $\mathbb{R}$,
- ....

3.2 Funzionale

Sia V uno spazio vettoriale; si chiama *funzionale in* V ogni funzione F definita in V e a valori in $\mathbb{R}$, i.e.

$$F : V \to \mathbb{R}.$$

Ad esempio se V è lo spazio delle funzioni continue in $[0, 1]$, sono funzionali in V i seguenti (dove $x = x(t)$ indica una generica funzione continua in $[0, 1]$):

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_0^1 x(s)ds \\ F_2(x) &= \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \\ F_3(x) &= 437x(0) + 567x(1) \end{aligned}$$

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2005-2006
Traccia della lezione del 9 febbraio 06

February 11, 2006

1 Le distribuzioni come ampliamento di L^1_{loc}

Nella lezione scorsa si è definito lo spazio delle distribuzioni. Precisamente, indicato con D lo spazio vettoriale formato da tutte le funzioni reali (di variabile reale) infinitamente derivabili e a supporto compatto, ossia

$$D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\},$$

si chiama *spazio delle distribuzioni* l'insieme formato da tutti i funzionali lineari e continui definiti su D. Tale spazio si indica con il simbolo $\mathfrak{D}$, ossia

$$\mathfrak{D} = \{T : D \to \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}.$$

Si è visto poi che tale spazio $\mathfrak{D}$ può essere interpretato come una estensione di L^1_{loc}. Infatti, indicato con $\mathfrak{D}^*$ il sottoinsieme di $\mathfrak{D}$ formato da tutte le distribuzioni il cui crochet è dato da (1), ossia

$$\mathfrak{D}^* = \left\{ T \in \mathfrak{D} \ : \exists f \in L^1_{loc} : T(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt \qquad \forall \varphi \in D \right\},$$

si è visto che tale sottospazio $\mathfrak{D}^*$ è in corrispondenza biunivoca con L^1_{loc}, ossia

$$\mathfrak{D}^* \sim L^1_{loc}$$

In altre parole, ogni $f \in L^1_{loc}$ può essere pensata come distribuzione (precisamente quella il cui crochet è definito da

$$T_f(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt. \tag{1}$$

Non è difficile poi provare che si tratta di una **effettiva** estensione, in quanto esistono anche distribuzioni, ad esempio $\delta(t), \delta(t-a)$, che **non** possono essere definite tramite funzioni di L^1_{loc}, e quindi che non appartengono a $\mathfrak{D}^*$.

Pertanto si ha

$$L^1_{loc} \sim \mathfrak{D}^* \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{D}$$

i.e. $\mathfrak{D}^*$ è strettamente contenuto in $\mathfrak{D}$, in quanto, come si è appena affermato, le distribuzioni $\delta(t), \delta(t-a)$, prima considerate, non sono elementi di $\mathfrak{D}^*$.

2 Convergenza in $\mathfrak{D}$

Per analizzare le proprietà delle distribuzioni è utile introdurre in $\mathfrak{D}$ una nozione di convergenza. Precisamente diremo che *una successione di distribuzioni* $\{T_n\}$ *converge in* $\mathfrak{D}$ *ad una distribuzione* T *se la successione numerica* $\{T_n(\varphi)\}$ *converge a* $T(\varphi)$ *per ogni* $\varphi \in D$; ossia

$$\{T_n\} \xrightarrow{\mathfrak{D}} T \qquad \text{se} \qquad \{T_n(\varphi)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi) \qquad \forall \varphi \in D$$

o, equivalentemente,

$$\lim_n T_n \overset{\mathfrak{D}}{=} T \qquad \text{se} \qquad \lim_n T_n(\varphi) \overset{\mathbb{R}}{=} T(\varphi) \qquad \forall \varphi \in D.$$

Utilizzando tale nozione, si può provare il seguente Teorema (di rappresentazione):

Teorema - *Ogni distribuzione è limite (in* $\mathfrak{D}$*) di una successione di elementi di* L^1_{loc}*, ossia*

$$\overline{L^1_{loc}} = \mathfrak{D}.$$

In altre parole il Teorema precedente afferma che per ogni $T \in \mathfrak{D}$ esiste una successione $\{f_n(t)\}$, contenuta in L^1_{loc}, che converge in $\mathfrak{D}$ (nel senso sopra specificato) alla distribuzione T.

Ad esempio è facile provare che la distribuzione $\delta(t)$ sopra definita è il limite (in $\mathfrak{D}$) della successione $\{k_n(t)\}$, dove

$$k_n(t) = \begin{cases} n & \text{se } t \in [0, 1/n] \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In altre parole la distribuzione $\delta(t)$ gode della **importante** proprietà:

$$\delta(t) \stackrel{\mathfrak{D}}{=} \lim_n k_n(t)$$

3 Derivata di una distribuzione

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Allora $f' \in L^1_{loc}$ e quindi f' può essere pensata come distribuzione e sia ha

$$\langle f'(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\ \varphi(t)\ dt$$

Utilizzando poi la regola di integrazione per parti si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} f'(t)\ \varphi(t)\ dt = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\ \varphi'(t)\ dt = -\langle f(t), \varphi'(t) \rangle\ ;$$

pertanto

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \langle f'(t), \varphi(t) \rangle = -\langle f(t), \varphi'(t) \rangle\ .$$

Tale relazione suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione; si chiama *derivata di* T (nel senso delle distribuzioni) e si indica con DT, la distribuzione definita da

$$\langle DT, \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} -\langle T, \varphi'(t) \rangle\ ,\ \forall \varphi \in D.$$

Proprietà:

- Ogni distribuzione è derivabile infinite volte.
- $$\text{Se } f \in C^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow f' \equiv Df$$
- $$D[u(t)] = \delta(t)$$

  dove $u = u(t)$ rappresenta la funzione scalino (di Heaveside)

  $$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}\ .$$

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2005-2006
Traccia della lezione del 15 febbraio 06

February 15, 2006

1 Derivata di una distribuzione

Nella lezione scorsa si introdotto il concetto di derivata di una distribuzione. Precisamente:

Definizione - Sia T una distribuzione; si chiama *derivata di* T (nel senso delle distribuzioni) e si indica con DT, la distribuzione definita da

$$\langle DT, \varphi(t)\rangle =_{\text{def}} -\langle T, \varphi'(t)\rangle\ ,\ \forall \varphi \in D.$$

Proprietà:

- Ogni distribuzione è derivabile infinite volte.
- $$\text{Se } f \in C^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow f' \equiv Df$$
- Indicata con $u = u(t)$ la funzione scalino, si ha
$$D[u(t)] = \delta(t).$$
- $$D[u(t) - u(t-a)] = \delta(t) - \delta(t-a).$$

- **Teorema -** *Se* $f \in C^1(\mathbb{R}/\{t_0\})$ *e* $f' \in L^1_{loc}$*, allora*

$$f(t_0+) = \lim_{t\to t_0+} f(t), \qquad f(t_0-) = \lim_{t\to t_0-} f(t),$$

esistono finiti e si ha

$$Df = f'(t) + [f(t_0+) - f(t_0-)]\delta(t - t_0).$$

Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 5e^{2t} & \text{se } t > 0 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha

$$Df = f'(t) + 5\delta(t).$$

Il teorema precedente si estende poi immediatamente al caso in cui f sia derivabile con derivata continua in tutto $\mathbb{R}$, eccetto un numero finito o un'infinità numerabile di punti.

- La distribuzione $\delta(t)$ è derivabile e si ha

$$\langle \delta'(t), \varphi(t)\rangle =_{\text{def}} -\varphi'(0), \ \forall\varphi \in D$$
$$\langle \delta''(t), \varphi(t)\rangle =_{\text{def}} \varphi''(0), \ \forall\varphi \in D$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\left\langle \delta^{(n)}(t), \varphi(t)\right\rangle =_{\text{def}} (-1)^n\varphi^{(n)}(0), \ \forall\varphi \in D.$$

In modo analogo si definiscono le derivate di $\delta(t - a)$.

2 Prodotto di distribuzioni

Ricordiamo che nello spazio L^1_{loc} il prodotto non sempre è definito. Ad esempio la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0, 1) \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a L^1_{loc}, ma $f^2 \notin L^1_{loc}$. Tuttavia se $f \in L^1_{loc}$ e $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora il prodotto $f\ g$ è, ovviamente, definito e si ha

$$\langle f\ g, \varphi \rangle = \langle f, g\ \varphi \rangle \,, \qquad \forall \varphi \in D.$$

Tale relazione suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione e sia $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si chiama *distribuzione prodotto* $T\ g$ la distribuzione definita da

$$\langle T\ g, \varphi \rangle = \langle T, g\ \varphi \rangle \,, \qquad \forall \varphi \in D$$

Nello spazio delle distribuzioni si definisce il prodotto soltanto nel caso precedente, i.e. quando almeno uno dei due fattori è una funzione ("tradizionale") di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Pertanto, ad esempio, non si definiscono i simboli $\delta^2(t)$, $e^{-|t|}\delta(t)$, $(\log t)\delta(t)$, $t^{-7}\delta(t)$.

Provare che

$$\begin{aligned} e^{2t}\delta(t) &= \delta(t); \\ (t^2+4)\delta(t) &= 4\delta(t) \\ \sin t\delta(t-\frac{\pi}{2}) &= \delta(t-\frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

ESERCIZI

Verificare che

$$\begin{aligned} D[(3+5t)\delta'(t-1)] &= -5\delta'(t-1) + 8\delta''(t-1) \\ (t-1)\delta'(t) &= D[(\sin t)\delta'(t) - u(t)] \\ tDf &= f(t) - 4\delta(t) \end{aligned}$$

dove $f(t) = t[u(t) - u(t-2)]$.

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2005-2006
Traccia della lezione del 16 febbraio 06

February 16, 2006

1 Le distribuzioni temperate

Si consideri lo spazio vettoriale S definito da

$$S = \left\{ \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) : t^j \varphi^{(k)}(t) \to 0 \text{ per } |t| \to +\infty, \; j, k = 0, 1, 2, ... \right\}.$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni a decrescenza rapida.* Infatti una funzione φ appartiene a tale spazio se è infinitamente derivabile e tende a zero (per $t \to \pm\infty$), insieme a tutte le derivate $\varphi^{(i)}$, più velocemente di qualunque potenza di t. Ad esempio la funzione $\varphi(t) = e^{-t^2}$appartiene a S.

Ricordando la definizione dello spazio D delle funzioni test

$$D = \{\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\},$$

si ha

$$D \underset{\neq}{\subset} S.$$

E' poi possibile definire in tale spazio una nozione di convergenza.

Ciò premesso si consideri lo spazio formato da tutti i funzionali lineari e continui definiti su S. Tale spazio si indica con il simbolo $\Im$, ossia

$$\Im = \{T : S \to \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Tenendo conto che

$$D \underset{\neq}{\subset} S,$$

si ha allora

$$\Im \subset \mathfrak{D},$$

ossia $\Im$ è un sottospazio di $\mathfrak{D}$. Gli elementi di $\Im$ sono quindi particolari distribuzioni, che prendono nome di *distribuzioni temperate* e il sottospazio $\Im$ si chiama *spazio delle distribuzioni temperate*.

E' possibile provare che sono distribuzioni temperate (i.e. elementi di $\Im$):

1. le funzioni $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ (quindi, in particolare, sono distribuzioni temperate tutte le funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$);

2. le funzioni $f \in L^1_{loc}$ e a crescita lenta, ossia tali che $\exists\ M, q \geq 0$: $|f(t)| \leq M(1 + |t|^q)$;

3. le funzioni $f \in L^1[a, b]$ e periodiche di periodo $b - a$;

4. le distribuzioni $\delta(t)$, $\delta(t - a)$;

5. se $T \in \Im$ allora $DT \in \Im$ (in particolare quindi sono distribuzioni temperate $\delta^{(n)}(t)$, $\delta^{(n)}(t - a)$.

Non sono invece distribuzioni temperate le funzioni

$$e^t,\ e^{-t},\ \sinh t,\ \cosh t.$$

Quindi $\Im$ è un sottospazio proprio di $\mathfrak{D}$.

Si osservi poi che, in virtù di 2., sono distribuzioni temperate le funzioni costanti, i polinomi, le funzioni $\sin t$, $\cos t$.

2 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Sia $\varphi \in S$. Essendo φ a decrescenza rapida si ha $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi φ ammette trasformata di Fourier. Sia pertanto Φ la sua trasformata, ossia $\Phi(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi\}$. Usando le proprietà della trasformata di Fourier in L^1, è possibile provare che "lo spazio S è chiuso rispetto all'operatore trasformata di Fourier", ossia che vale il seguente:

Lemma - *Sia $\varphi \in S$. Allora $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e, indicata con Φ la sua trasformata di Fourier, si ha $\Phi \in S$.*

Si ha poi il seguente:

Teorema - *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ *e sia* F *la sua trasformata di Fourier, ossia* $F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}$. *Allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\varphi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\Phi(\omega)d\omega, \ \forall\varphi \in S$$

ossia

$$\langle F, \varphi\rangle = \langle f, \Phi\rangle, \ \forall\varphi \in S$$

o, equivalentemente,

$$\langle \mathcal{F}\{f\}, \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}\{\varphi\}\rangle, \ \forall\varphi \in S.$$

Tale Teorema suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione temperata; si chiama *trasformata di Fourier di* T (nel senso delle distribuzioni) e si indica con $\mathcal{F}_D\{T\}$, la distribuzione temperata definita da

$$\langle \mathcal{F}_D\{T\}, \varphi\rangle =_{\text{def}} \langle T, \mathcal{F}\{\varphi\}\rangle, \ \forall\varphi \in S.$$

Tale definizione riconduce quindi il calcolo della trasformata $\mathcal{F}_D$ a quello della trasformata "classica" $\mathcal{F}$ (i.e. in L^1 o L^2).

Dal Teorema precedente si ha poi la seguente proprietà

- Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}_D\{f\} \equiv \mathcal{F}\{f\}$,ossia se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora la trasformata nel senso delle distribuzioni di f coincide con quella "classica".

La definizione precedente acquista quindi significato per quelle "funzioni" che non appartengono a $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. In particolare vale la seguente tabella per le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni"elementari" a crescita lenta ($A \in \mathbb{R}$)

funzione	$\rightarrow$	trasformata
1		$2\pi\delta(\omega)$
t		$2\pi j\delta'(\omega)$
t^n		$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$
e^{jAt}		$2\pi\delta(\omega - A)$
$\sin(At)$		$\pi j[\delta(\omega + A) - \delta(\omega - A)]$
$\cos(At)$		$\pi[\delta(\omega + A) + \delta(\omega + A)]$

Per la distribuzione $\delta(t)$ si ha poi

$$\mathcal{F}_D\left\{\delta(t)\right\} = 1$$
$$\mathcal{F}_D\left\{\delta(t-a)\right\} = e^{-ja\omega},\ a \in \mathbb{R}.$$

Vale infine la proprietà

$$T \in \Im \Longrightarrow \mathcal{F}_D\left\{DT\right\} = j\omega\mathcal{F}_D\left\{T\right\}.$$

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2005-2006
Traccia della lezione del 22 febbraio 06

February 22, 2006

1 Trasformata di Laplace di distribuzioni

Definizione - Fissato $x \in \mathbb{R}$, sia T una distribuzione tale che Te^{-xt} risulti essere una distribuzione temperata. Si chiama *trasformata di Laplace (nel senso delle distribuzioni)* e si indica con $L_D[f]$, oppure con $F(s)$, la funzione

$$L_D[T] = F(s) = \left\langle Te^{-xt}, e^{xt}\lambda(t)e^{-st} \right\rangle \tag{1}$$

dove $\operatorname{Re} s > x$ e λ è una funzione tale che

$$\begin{aligned} &\lambda \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \\ &\lambda(t) = 1 \qquad \text{se } t \geq -\varepsilon_1 \qquad (-\varepsilon_1 < 0) \\ &\lambda(t) = 0 \qquad \text{se } t \leq -\varepsilon_2, \qquad (-\varepsilon_2 < -\varepsilon_1). \end{aligned} \tag{2}$$

Si puo' provare che il crochet (1) è indipendente dalla scelta della funzione λ (purché siano verificate le condizioni (2)) e dalla scelta di x. Il crochet (1) dipende quindi soltanto dalla scelta del numero complesso s e pertanto la notazione $F(s)$, usata per indicare tale crochet, è ben posta. Si osservi poi che, per le ipotesi fatte, il primo elemento del crochet, ossia Te^{-xt} è una distribuzione temperata, mentre il secondo, i.e. $e^{xt}\lambda(t)e^{-st}$, è una funzione a decrescenza rapida.

Proprietà : Se $f \in \Lambda$, allora la trasformata di Laplace di f (in senso classico) **coincide** con la trasformata di Laplace nel senso delle distribuzioni. In altre parole:

$$L_D[f] \equiv L[f].$$

Pertanto la definizione (1) assume significato quando, ferme restando le altre condizioni, T non sia una funzione di classe Λ. In particolare un semplice calcolo prova che:

$$\begin{gathered}
L_D[\delta(t)] = 1 \\
L_D[\delta'(t)] = s \\
\dots\dots \\
L_D[\delta^{(n)}(t)] = s^n.
\end{gathered}$$

Per quanto concerne le funzioni razionali, il seguente risultato generalizza quello visto alcune lezioni fa'.

Teorema *Ogni funzione razionale*

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

è una trasformata di Laplace. Precisamente, se grado $N <$ grado D, F è la trasformata di Laplace una funzione di classe Λ; altrimenti, se grado $N \geq$ grado D, F è la trasformata di Laplace di di una distribuzione.

Ad esempio la funzione

$$F_1(s) = \frac{s^3 + 8}{s^3 + 3s^2 + 1}$$

è la trasformata di una distribuzione, mentre

$$F_2(s) = \frac{s^2 + 8}{s^3 + 3s^2 + 1}$$

è la trasformata di una funzione di classe Λ.

Teorema derivazione *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}), f, f' \in \Lambda$. Allora si ha*

$$L[f'] = sL[f] - f(0+) \qquad \text{(”derivazione in senso classico”)}$$
$$L_D[Df] = L[f] - f(0-) \qquad \text{(”derivazione nel senso delle distrib.”)}$$

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2005-2006
Traccia della lezione del 23 febbraio 06

February 23, 2006

1 Equazioni differenziali lineari - Richiami

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{1}$$

dove le funzioni a, b sono continue a tratti in un intervallo I dell'asse reale. Allora:

1. *Per ogni* $x_0 \in I$ *e per ogni* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *esiste un'unica soluzione* $y = y(x)$ *di (1) tale che* $y(x_0) = c_1$, $y'(x_0) = c_2$.

2. *Ogni soluzione di (1) è persistente, ossia è definita in tutto l'intervallo* I.

3. *L'insieme delle soluzioni di (1) è uno spazio lineare di dimensione* 2 .

2 Un esempio

Se le funzioni a e b sono costanti, allora (*1*) diviene un'equazione "a coefficienti costanti" la cui risolubilità è stata trattata nei corsi di Analisi. Esistono tuttavia nelle applicazioni vari casi in cui il modello matematico è rappresentato da un'equazione tipo (*1*) con a e/o b non a coefficienti costanti. Un primo esempio è l'equazione di Scrödinger monodimensionale

$$w'' + \frac{2m}{H^2}(E - V(x))w = 0 \tag{2}$$

dove :

m rappresenta la massa dell'elettrone;

H è la costante di Planck normalizzata (i.e. $H = h/(2\pi)$, $h =$ costante di Planck);

E è l'energia dell'elettrone;

V è il potenziale applicato;

w è una funzione legata alla funzione d'onda ($|w(x)|^2$ rappresenta la probabilita' che l'elettrone occupi effettivamente la posizione x).

L'equazione (2) è di tipo (*1*) con

$$a(x) = 0, \qquad b(x) = \frac{2m}{H^2}(E - V(x)).$$

Nel corso della lezione è stata analizzata l'equazione (2) nei due casi seguenti:

1. **Gradino di potenziale :**

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{con } V_0 > E) \tag{3}$$

2. **Barriera di potenziale :**

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{se } 0 < x < X \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{con } V_0 > E). \tag{4}$$

Un altro esempio sara' esamito nel prossimo paragrafo.

3 L'equazione di Bessel (caso n intero positivo)

Si chiama **equazione di Bessel** l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \qquad x \in (0, +\infty) \tag{B}$$

dove n è un parametro reale.

Nel caso particolare in cui n sia un intero positivo, si può dimostrare che tra le soluzioni di (B) vi sono le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \tag{5}$$

Le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie* e godono delle seguenti proprietà:

1. se n è pari, allora J_n è una serie di polinomi pari;
2. se n è dispari, allora J_n è una serie di polinomi dispari;
3. $J_0(0+) = 1$; $J_n(0+) = 0$ per n intero positivo.

4 La funzione Gamma Euleriana

Si chiama *Gamma Euleriana* la funzione

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Tale integrale converge per ogni valore positivo del parametro reale x e quindi la funzione Gamma Euleriana è definita in $(0, \infty)$. Essa gode delle seguenti proprietà (di immediata verifica):

1. $\Gamma(1) = 1$;
2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (e quindi $\Gamma(2) = 1$);
3. $\Gamma(x+2) = x(x+1)\Gamma(x)$;
4. $\Gamma(x+3) = x(x+1)(x+2)\Gamma(x)$;

   ....
5. $\Gamma(x+n) = x(x+1).....(x+n-1)\Gamma(x)$;

Ponendo in (5) $x = 1$ si ha poi l'importante proprietà

$$\Gamma(n+1) = n!$$

ossia **la funzione Gamma Euleriana è l'estensione al caso continuo del concetto di fattoriale.**

Come conseguenza delle relazioni 1) ,...5) si ha che la funzione Γ è nota, quando siano noti i valori che Γ assume in $(0, 1]$. Infatti se Γ è nota in $(0, 1]$, usando 2) si ottiene che Γ è nota anche in $(1, 2]$. Usando poi 3) si ottiene che Γ è nota anche in $(2, 3]$, e così via. Tale risultato puo' essere migliorato. Infatti è possibile provare che per $x \in (0, 1/2]$ vale la relazione

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

e da tale relazione ne segue che se Γ è nota in $(0, 1/2]$, allora Γ è nota anche in $[1/2, 1)$.

In conclusione:

I valori della funzione Γ sono noti, non appena siano noti i valori che Γ assume in $(0, 1/2]$.

Per tale motivo i valori di Γ vengono usualmente tabulati per $x \in (0, 1/2]$.

Usando le relazioni 2), ...5) è possibile poi estendere la definizione della funzione Γ anche sul semiasse negativo, ad eccezione dei punti $0, -1, -2, -3, ...$ Infatti da 2) si ha per $x \neq 0$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1);$$

poichè il secondo membro ha senso anche per $x \in (-1, 0)$ si puo' usare tale relazione per estendere la definizione di Γ anche all'intervallo $(-1, 0)$. Precisimente si pone allora

$$\Gamma(x) =_{\text{def}} \frac{1}{x}\Gamma(x+1) \qquad \text{se } x \in (-1, 0).$$

Usando poi le relazioni 3)..5) si puo' procedere nell'estensione della definizione di Γ sul semiasse negativo. Precisamente si pone

$$\Gamma(x) =_{\text{def}} \frac{1}{x(x+1)}\Gamma(x+2) \qquad \text{se } x \in (-2,-1)$$
$$\Gamma(x) =_{\text{def}} \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\Gamma(x+3) \qquad \text{se } x \in (-3,-4)$$

....

Si osservi infine che per quanto riguarda il comportamento della funzione Γ nei punti $x = 0, x = -1, x = -2,$ ..... si ha

$$\lim_{x \to -n} |\Gamma(x)| = +\infty \tag{6}$$

con $n = 0, 1, 2, ...$

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2005-2006
Traccia della lezione del 1 marzo 06

March 1, 2006

1 Funzioni di Bessel (caso n reale)

Indicata con Γ la funzione Gamma Euleriana, per ogni $n \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \tag{1}$$

sono soluzioni dell'equazione di Bessel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x \in (0, +\infty) \tag{B}$$

Le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie.* Se n è intero positivo, poiché $\Gamma(k+n+1) = (n+k)!$, l'espressione (1) si riduce a quella vista la lezione scorsa.

Nel caso particolare in cui n sia un intero negativo, i primi n termini della serie (1) sono nulli, in quanto $|\Gamma(k+n+1)| = +\infty$. Ad esempio, per $J_{-7}(x)$ si ha

$$J_{-7}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-6)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-7}. \tag{2}$$

Poiché $|\Gamma(k-6)| = +\infty$ se $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, i primi 7 termini di (2) sono nulli e quindi la somma in tale serie inizia effettivamente da $k = 7$, ossia

$$J_{-7}(x) = \sum_{k=7}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-6)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-7}.$$

Vale il seguente:

Teorema
(i) Fissato $n \in \mathbb{R}$, le funzioni J_n e J_{-n} sono entrambe soluzioni di (B).
(ii) Se n è intero, i.e. $n \in \mathbb{Z}$, allora

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x),$$

e quindi J_n e J_{-n} sono linearmente dipendenti.
(iii) Se n è reale, ma non intero, i.e. $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, allora J_n e J_{-n} sono linearmente indipendenti.

Pertanto se $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ricordando che lo spazio delle soluzioni di (B) ha dimensione 2, dal Teorema precedente (punto (iii)) si ha che tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x), \tag{3}$$

dove c_1,c_2 sono due arbitrarie costanti reali. Scegliendo poi in (3)

$$c_1 = \frac{\cos\ \pi n}{\sin\ \pi n}, \qquad c_2 = \frac{-1}{\sin\ \pi n}$$

si ottiene la soluzione di (B) data da

$$Y_n(x) = \frac{\cos\ \pi n}{\sin\ \pi n} J_n(x) - \frac{1}{\sin\ \pi n} J_{-n}(x) \qquad (n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Le funzioni Y_n si chiamano *funzioni di Bessel di seconda specie* e, per quanto appena detto, sono anch'esse soluzioni di (B).

Nel caso infine in cui n sia intero, si definiscono le funzioni di Bessel di seconda specie nel modo seguente:

$$Y_n(x) = \lim_{p \to n} \left(\frac{\cos\ \pi p}{\sin\ \pi p} J_p(x) - \frac{1}{\sin\ \pi p} J_{-p}(x) \right) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

e si può provare che anche in tal caso le funzioni Y_n sono soluzioni di (B).

Inoltre le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n sono linearmente indipendenti da J_n, sia nel caso n intero che nel caso $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$; pertanto per ogni n reale tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$d_1 J_n(x) + d_2 Y_n(x),$$

dove d_1 e d_2 sono due arbitrarie costanti reali.

Infine si chiamano *funzioni di Hankel* le funzioni

$$H_n^{\pm}(x) = J_n(x) \pm jY_n(x)$$

dove j rappresenta l'unità immaginaria.

2 Equazioni differenziali lineari:oscillazione

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{4}$$

dove le funzioni a, b sono continue a tratti in $(x_0, +\infty)$.

Definizione - Sia y una soluzione di (4), diversa dalla soluzione nulla; y si dice *oscillante* se esiste una successione $\{x_n\}$, con $x_n \to +\infty$, tale che $y(x_n) = 0$, ossia se y ha infiniti zeri che si "accumulano all'infinito". In caso contrario y si dice *nonoscillante.*

Poiché per (4) vale la proprietà dell'unicità della soluzione rispetto ai dati iniziali, il grafico di una soluzione oscillante di (4) "taglia" l'asse x infinite volte (per $x \to +\infty$).

Vale il seguente:

Teorema di Sturm - *Tutte le soluzioni nonbanali di (4) hanno lo stesso carattere rispetto all'oscillazione, ossia o tutte oscillano o tutte nonoscillano.*

In virtù di tale risultato allora non possono coesistere per una stessa equazione di tipo (4) soluzioni oscillanti e nonoscillanti; pertanto (4) si dice *oscillante* o *nonoscillante* a seconda che tutte le sue soluzioni (diverse dalla soluzione nulla) siano oscillanti o nonoscillanti.

Moltiplicando l'equazione (4) per $e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$ si ottiene

$$e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} y'' + a(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} y' + b(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} y = 0$$

ossia

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0, \tag{5}$$

dove

$$p(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$$
$$q(x) = b(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$$

L'equazione (5), che è equivalente a (4), prende nome di *equazione lineare in forma autoaggiunta.* E' evidente che (4) è oscillante se e solo se lo è (5). Cio' premesso, si ha il seguente:

Teorema di confronto di Sturm - *Si considerino le due equazioni*

$$(p_1(x)y')' + q_1(x)y = 0, \tag{6}$$
$$(p_2(x)y')' + q_2(x)y = 0, \tag{7}$$

dove per ogni x sufficientemente grande

$$p_1(x) \geq p_2(x) \qquad \text{e} \qquad q_1(x) \leq q_2(x).$$

Se (6) è oscillante, allora (7) è oscillante
Se (7) è nonoscillante, allora (6) è nonoscillante.

L'equazione (6) è chiamata *minorante* e (7) *maggiorante.* Il motivo di tale denominazione è dovuto al caso in cui $p_1(x) = p_2(x) = 1$. In questo caso tali equazioni si riducono, rispettivamente, a

$$y'' + q_1(x)y = 0,$$
$$y'' + q_2(x)y = 0,$$

e quindi tale denominazione è evidente, in quanto per ogni x grande si ha $q_1(x) \leq q_2(x)$.

Il Teorema di confronto di Sturm non sempre consente di stabilire se una assegnata equazione lineare del secondo ordine sia oscillante oppure no. Ad esempio, tale teorema non è applicabile all'equazione

$$y'' + \frac{1}{x}y = 0. \tag{8}$$

Un altro criterio di oscillazione è il seguente:

Teorema di Leigthon -
(i) L'equazione (5) è oscillante se

$$\int^{\infty} \frac{1}{p(x)} dx = \int^{\infty} q(x) dx = \infty$$

(ii) L'equazione (5) è nonoscillante se

$$q(x) \leq 0 \qquad \textit{per ogni } x \textit{ sufficientemente grande.}$$

- ESEMPI

Applicando il Teorema di Leigthon si ottiene facilmente:
1) L'equazione (8) è oscillante. Così pure è oscillante l'equazione

$$y'' + \frac{2x^2 + 1}{4x^2 + 4} y = 0.$$

2) L'equazione

$$y'' + \frac{1 - 2x^2}{4x^2 + 4} y = 0$$

è nonoscillante.

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2005-2006
Traccia della lezione del 2 marzo 06

March 3, 2006

1 Correzione lezione del 23/02/06

Nella traccia della Lezione del 23 febbraio, il Teorema della derivazione per la Trasformata di Laplace è riportato in forma non corretta. Questa è la versione esatta:

Teorema derivazione *Sia* $f \in C^1(\mathbb{R}), f, f' \in \Lambda$. *Allora si ha*

$$L[f'] = sL[f] - f(0+) \qquad (\text{"derivazione in senso classico"})$$
$$L_D[Df] = sL[f] - f(0-) \qquad (\text{"derivazione nel senso delle distrib."}).$$

2 Sviluppo in serie di funzioni di Bessel

Data l'equazione di Bessel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x \in (0, +\infty), \tag{B}$$

usando il criterio di Leigthon visto la lezione scorsa, è facile mostrare il seguente:

Teorema - *L'equazione di Bessel (B) è oscillante, ossia ogni sua soluzione ha infiniti zeri reali positivi che si accumulano all'infinito.*

Fissato allora il numero reale n, indichiamo per semplicità di notazioni con J la funzione di Bessel di indice n. Per il Teorema precedente, tale funzione ha infiniti zeri reali positivi. Indicati con λ_k tali zeri, si ha quindi

$$J(\lambda_k) = 0.$$

Ciò posto, si chiamano *funzioni di Bessel modificate* le funzioni

$$\begin{gathered} u_0(x) =_{\text{def}} J(\lambda_0 x) \\ u_1(x) =_{\text{def}} J(\lambda_1 x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_k(x) =_{\text{def}} J(\lambda_k x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Vale il seguente:

Teorema - *Sia* $f \in X$, *dove*

$$X = \left\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tali che } \int_0^1 x|f(x)|^2 dx \right\}.$$

Allora f *è sviluppabile in serie di funzioni di Bessel modificate, ossia*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k u_k(x),$$

dove

$$b_k = \frac{2}{[J'(\lambda_k)]^2} \int_0^1 x u_k(x) f(x) dx.$$

3 Formule di ricorrenza

Per le funzioni di Bessel valgono le seguenti formule:

$$\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x) \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-n} J_n(x)\right) = -x^{-n} J_{n+1}(x) \tag{2}$$

Da (1) e (2) si hanno poi le cosidette *formule di ricorrenza*

$$\begin{aligned} xJ_n'(x) &= xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x) \\ xJ_n'(x) &= xJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) \\ 2J_n'(x) &= J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \\ 2nJ_n(x) &= xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Tali formule poi continuano a valere anche per le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n.

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2005-2006
Correzione + traccia lezione del 9 marzo 2006

March 10, 2006

1 Correzione lezione del 2/03/06

Nella traccia della Lezione del 2 marzo, la seconda delle formule di ricorrenza per le funzioni di Bessel, relativa a $xJ_n'(x)$, *contiene un errore di stampa. La formulazione corretta è quella presentata a lezione, che qui riportiamo*

Per le funzioni di Bessel valgono le seguenti formule:

$$\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(x^{-n} J_n(x)\right) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

Da tali formule si ottengono poi le cosidette *formule di ricorrenza*

$$xJ_n{}'(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x)$$
$$xJ_n{}'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$$
$$2J_n{}'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$
$$2nJ_n(x) = xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x).$$

2 Complementi sulle distribuzioni: v.p. (1/t)

Consideriamo il funzionale T definito da

$$T : \varphi \in D \to \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt \tag{1}$$

L'integrale in (1) è ben definito in quanto la funzione integranda è nulla per ogni t sufficientemente grande ($\varphi \in D$) ed inoltre

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} = 2\varphi'(0).$$

Si può provare che tale funzionale è lineare e continuo in D e quindi è una distribuzione. tale distribuzione si indica con $v.p.1/t$, ossia

$$\left\langle v.p.\frac{1}{t}, \varphi(t) \right\rangle =_{\text{def}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt.$$

Il motivo del nome dato a questa distribuzione è giustificato dal fatto che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{t} \varphi(t) dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{t} \varphi(t) dt \right),$$

dove ε è una costante positiva.

Proprietà:

- la derivata nel senso delle distribuzioni di $\log |t|$ è $v.p.\frac{1}{t}$,i.e.

$$D(\log |t|) = v.p.\frac{1}{t};$$

- Trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = -jv.p.\frac{1}{\omega} + \pi\delta(\omega)$$
$$\mathcal{F}\{sgn(t)\} = -2jv.p.\frac{1}{\omega},$$

dove $u(t)$ rappresenta la funzione scalino e $sgn(t)$ la funzione "segno", i.e.

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t > 0 \\ -1 & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$