

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2006-2007

Traccia delle lezioni del 24 e 25 gennaio 2007

January 25, 2007

1 Spazi normati

Sia V uno spazio vettoriale complesso. Si chiama *norma in V* ogni applicazione $\|\cdot\|$

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

$$\begin{aligned} \|f\| &\geq 0, = 0 \text{ se e solo se } f = \underline{0} & \forall f \in V, \\ \|\alpha f\| &= |\alpha| \|f\| & \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f \in V \\ \|f + g\| &\leq \|f\| + \|g\| & \forall f, g \in V \end{aligned}$$

e lo spazio V si chiama *spazio normato*.

Ad esempio, se V è lo spazio delle funzioni continue in $[0, 1]$, ossia $V = C[0, 1]$, allora è immediato verificare che sono norme in $C[0, 1]$ le seguenti ($f \in C[0, 1]$):

$$\begin{aligned} \|f\|_M &= \max_{t \in [0, 1]} |f(t)| \\ \|f\|_1 &= \int_0^1 |f(t)| dt \\ \|f\|_2 &= \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

- Ogni spazio normato V è anche uno spazio metrico, con distanza d data da

$$d(f, g) = \|f - g\| \quad (f, g \in V)$$

In riferimento all'esempio di sopra, allora in $C[0, 1]$ è possibile considerare le tre distanze (metriche) $(f, g \in C[0, 1])$:

$$\begin{aligned} d_M(f, g) &= \|f - g\|_M = \max_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)| \\ d_1(f, g) &= \|f - g\|_1 = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \\ d_2(f, g) &= \|f - g\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Esercizio. Sia $f(t) = t(1 - t)$, $g(t) = t/2$. Si verifichi che

$$d_M(f, g) = 1/2, \quad d_1(f, g) = 1/8.$$

2 Richiami sul concetto di integrale improprio

Sia f una funzione reale di variabile reale, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile in ogni intervallo limitato e chiuso dell'asse reale. Se, **comunque** siano scelti $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, esiste finito il limite

$$\lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

e tale limite è indipendente da a, b , allora si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx =_{def} \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

e diremo che f è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, o, equivalentemente che l'integrale di f , esteso a $\mathbb{R}$, converge. In caso contrario diremo che f non è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ o semplicemente che f non è integrabile in $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, che l'integrale di f , esteso a $\mathbb{R}$, non converge.

Si chiama poi *valore principale dell'integrale improprio* (in $\mathbb{R}$), e si indica con

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

il limite

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx =_{def} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L}^{+L} f(x) dx. \quad (2)$$

La relazione tra le due definizioni (1), (2) è, ovviamente, la seguente: se f è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, allora il valore principale dell'integrale improprio esiste finito e coincide con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, ossia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = M \implies v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = M.$$

Ovviamente NON vale il viceversa, ossia il valore principale dell'integrale improprio può essere finito, ma l'integrale (1) può non convergere, i.e.

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = M \not\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = M.$$

Ad esempio per la funzione

$$f(x) = \frac{x^5}{x^4 + 1}$$

si ha

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^5}{x^4 + 1} dx = 0$$

in quanto la funzione è dispari, ma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

ovviamente non converge (f è illimitata!).

2.1 Gli spazi L^p

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile reale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e sia p un numero reale $p \geq 1$.

Scriviamo $f \in L^p(\mathbb{R})$, se $|f|^p$ è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, ossia se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt < \infty.$$

In particolare se $p = 1$, f si dice *sommabile* e in tal caso scriviamo $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Se $p = 2$, f si dice *a quadrato sommabile* e scriviamo $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Gli spazi $L^p(\mathbb{R})$ sono spazi normati (e quindi anche metrici).

In particolare la norma e la distanza in $L^1(\mathbb{R})$ sono date, rispettivamente, da ($f, g \in L^1(\mathbb{R})$)

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1} &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \\ d_{L^1}(f, g) &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)| dt \end{aligned}$$

Per quanto riguarda $L^2(\mathbb{R})$, la norma e la distanza sono date da ($f, g \in L^2(\mathbb{R})$)

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ d_{L^2}(f, g) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

3 Trasformata di Fourier in L^1

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile **reale** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sommabile, ossia $f \in L^1(\mathbb{R})$, i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty;$$

ciò posto, si chiama *Trasformata di Fourier (in L^1)* di f la funzione F definita da

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3)$$

dove ω è un numero reale fissato.

- La definizione (3) è lecita, nel senso che l'integrale in (3) converge per ogni ω reale.
- Utilizzando le formule di Eulero si ha:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt}_{(*)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt}_{(+)}$$

(*) si chiama *Trasformata coseno di Fourier* e (+) *Trasformata seno di Fourier*.

- Formula della antitrasformata : vale il seguente teorema

Teorema Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si supponga inoltre che f sia sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo chiuso $[-L, L]$, qualunque sia L . Ciò premesso si ha

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

4 Prime proprietà della trasformata di Fourier in L^1

Indichiamo con $\mathfrak{F}$ l'operatore che associa a $f(\in L^1(\mathbb{R}))$ la sua trasformata di Fourier F , ossia $\mathfrak{F}\{f\} = F$. Ciò premesso si ha:

Teorema. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; allora la sua trasformata F è una funzione continua e infinitesima per $|\omega| \rightarrow \infty$.

Corollario. La trasformata di Fourier F di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ è una funzione limitata per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

Ad esempio non sono trasf. di Fourier (di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$!) le funzioni

$$F_1(\omega) = \frac{\omega^2 + 12}{\omega^2 + 4}; F_2(\omega) = \frac{\omega + 12}{\omega^2 - 4}.$$

La trasformata di Fourier F di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$ può non essere derivabile. Esempi in tal senso saranno visti nelle prossime lezioni. Se, all'ipotesi $f \in L^1(\mathbb{R})$ aggiungiamo anche $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$, allora la risposta è affermativa, come segue subito dal seguente risultato.

Teorema Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$; allora la trasformata di Fourier F di f è derivabile e si ha:

$$\mathfrak{F}\{tf(t)\} = j \frac{d}{d\omega} F(\omega).$$

Si osservi che tale teorema fornisce solo una condizione sufficiente. Si osservi inoltre che le due ipotesi " $f \in L^1(\mathbb{R})$ " e " $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$ " sono tra loro indipendenti. Infatti, ad esempio, per la funzione f , data da

$$f(t) = \begin{cases} 1/t^2 & \text{se } t > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha " $f \in L^1(\mathbb{R})$ " e " $tf(t) \notin L^1(\mathbb{R})$ ", mentre per la funzione g , data da

$$g(t) = \begin{cases} 1/t & \text{se } t \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha " $g \notin L^1(\mathbb{R})$ " e " $tg(t) \in L^1(\mathbb{R})$ ".

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2006-2007

tracce lezioni del 26 e 31 gennaio 2007

January 31, 2007

1 Esempi di trasf. di Fourier

▲ **Impulso Rettangolare** - Sia

$$f(t) = \begin{cases} M & \text{se } |t| \leq L \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F(\omega) = 2ML \operatorname{sinc}(\omega L) = \begin{cases} 2M\omega^{-1} \sin(\omega L) & \text{se } \omega \neq 0 \\ 2ML & \text{se } \omega = 0 \end{cases}.$$

▲ **Impulso Triangolare** - Sia

$$f(t) = \begin{cases} M(t+1) & \text{se } -1 \leq t < 0 \\ M(1-t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F(\omega) = \frac{2M(1 - \cos \omega)}{\omega^2} \text{ per } \omega \neq 0, F(0) = M.$$

ossia

$$F(\omega) = M \left(\operatorname{sinc} \left(\frac{\omega}{2} \right) \right)^2$$

▲ **Impulso esponenziale** - Sia

$$f(t) = \exp(-|t|);$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}.$$

▲ **Impulso gaussiano** - Sia

$$f(t) = \exp(-t^2/2);$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F(\omega) = \sqrt{2\pi} \exp((- \omega^2/2).$$

2 Proprietà della trasformata F

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e sia F la sua trasformata di Fourier. Allora:

1. Se f è pari, allora F è pari.
2. Se f è dispari; allora F è dispari.
3. Se f è reale, allora $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$.
4. Se f è reale e pari, allora F è reale e pari.

Se inoltre f è sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso $[-L, L]$, allora valgono anche le relazioni inverse:

1. Se F è pari, allora f è pari.
2. Se F è dispari; allora f è dispari.
3. Se F è reale, allora $f(-t) = \overline{f(t)}$.
4. Se F è reale e pari, allora f è reale e pari.

3 Ancora sulla derivazione della trasformata

La trasformata di Fourier F di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$ può non essere derivabile. Se, all'ipotesi $f \in L^1(\mathbb{R})$ aggiungiamo anche $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$, allora la risposta è affermativa, come segue subito dal seguente risultato.

Teorema Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$; allora la trasformata di Fourier F di f è derivabile e si ha:

$$\mathfrak{F}\{tf(t)\} = j \frac{d}{d\omega} F(\omega).$$

In particolare dal teorema precedente seguono i seguenti:

Corollario 1 Sia $t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ per $n = 0, 1, \dots, N$. Allora la trasformata di Fourier F di f è una funzione di classe $C^N(\mathbb{R})$.

Corollario 2 Sia f a supporto compatto, i.e. esiste un intervallo compatto $[a, b]$ tale che $f(t) = 0$ se $t \notin [a, b]$. Sia f assolutamente integrabile in $[a, b]$. Allora f è trasformabile secondo Fourier e la sua trasformata F è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

4 Trasformata di Fourier in L^2

4.1 Generalità

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile **reale** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Tale funzione si dice *a quadrato sommabile*, e si scrive $f \in L^2(\mathbb{R})$, se $|f|^2$ è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, ossia se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Esistono funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R})$, ma non a $L^1(\mathbb{R})$ e viceversa. Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t^{-1} & \text{se } t > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $f \notin L^1(\mathbb{R})$. Invece per la funzione

$$g(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $g \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \notin L^2(\mathbb{R})$. Chiaramente poi esistono funzioni appartenenti sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$; ad esempio la funzione

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$, ossia $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

4.2 Il Teorema di Plancherel e la trasformata in L^2

Vale il seguente:

Teorema di Plancherel - Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$. Allora:

1) L 'integrale (nel senso del valore principale)

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

esiste per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, eccetto, al più, un insieme di misura nulla.

Posto allora

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

si ha inoltre:

2) $F \in L^2(\mathbb{R})$

3) Vale la formula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

4) Vale l'identità:

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

COMMENTI : la proprietà 4) è detta anche principio di conservazione della norma (o dell'energia).

La proprietà 1) suggerisce poi la seguente definizione.

DEFINIZIONE - Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$; si chiama *Trasformata di Fourier in L^2* , la funzione F definita da

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1)$$

OSSERVAZIONE : se inoltre $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora l'integrale in (1) coincide con l'integrale improprio, ossia la trasformata di Fourier in L^2 **coincide** con la trasformata di Fourier in L^1 , vista in precedenza. La definizione precedente è pertanto un'estensione del concetto di trasformata di Fourier e, ovviamente, assume rilevanza per quelle funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R})$ e non a $L^1(\mathbb{R})$, ossia per quelle funzioni per le quali la trasformata considerata nella precedente lezione non è definita.

Ciò posto, la proprietà 3) del teorema di Plancherel diviene la formula dell'antitrasformata, formula che, a differenza di quanto accade in L^1 , vale sotto le stesse ipotesi che assicurano l'esistenza della trasformata.

4.3 Proprietà di simmetria

Dal teorema di Plancherel segue l'importante proprietà della trasformata in L^2 :

Teorema (Proprietà di simmetria) Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ e sia $\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega)$ la sua trasformata. Allora $F \in L^2(\mathbb{R})$ e

$$\mathfrak{F}\{\mathfrak{F}\{f\}\} = 2\pi f(-\omega).$$

In particolare, se f è inoltre pari, allora la trasformata della trasformata di Fourier di f coincide con f , a meno di un fattore 2π .

Conseguenze:

◆ Poiché la trasformata dell'impulso rettangolare

$$f(t) = \begin{cases} M & \text{se } |t| \leq L \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

è la funzione

$$F(\omega) = 2ML \text{sinc}(\omega L),$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$g(t) = 2ML \operatorname{sinc}(Lt)$$

è

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = G(\omega) = \begin{cases} 2\pi M & \text{se } |\omega| \leq L \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

◆ Poiché la trasformata dell'impulso esponenziale

$$f(t) = \exp(-|t|);$$

è la funzione

$$F(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2},$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$g(t) = \frac{2}{1 + t^2}$$

è

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = G(\omega) = 2\pi \exp(-|\omega|).$$

5 Altre proprietà della trasformata di Fourier

1. **Linearità** - Siano $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$; allora:

$$\mathfrak{F}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 \mathfrak{F}\{f_1\} + c_2 \mathfrak{F}\{f_2\}, \quad c_i \in \mathbb{C}.$$

2. **Traslazione in frequenza** - Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$; allora:

$$\mathfrak{F}\{f(t)e^{j\gamma t}\} = F(\omega - \gamma), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

3. **Traslazione temporale** - Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$; allora:

$$\mathfrak{F}\{f(t - A)\} = e^{-jA\omega} F(\omega), \quad A \in \mathbb{R}.$$

4. **Omotetia** - Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup \mathbb{L}^\neq(\mathbb{R})$; allora:

$$\mathfrak{F}\{f(At)\} = \frac{1}{|A|} F\left(\frac{\omega}{A}\right), \quad A \in \mathbb{R}, A \neq 0.$$

5. Le proprietà della funzione trasformata F , viste nel paragrafo 2, continuano a valere anche se $f \in L^2(\mathbb{R})$. In tal caso però non serve l'ipotesi aggiuntiva che " f sia sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso $[-L, L]$ ".

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2006-2007

Tracce delle lezioni del 1 e 2 febbraio 2007

January 31, 2007

1 Calcolo della trasf. (antitrasf.) di Fourier nel caso razionale

Sia f una funzione razionale, ossia

$$f(t) = \frac{N(t)}{D(t)}$$

con N, D polinomi **primi tra loro**. Allora è immediato verificare che f è trasformabile secondo Fourier in L^2 se e solo se f è propria e priva di poli reali, ossia se e solo se

$$i) \text{ gr } N < \text{gr } D \tag{1}$$

$$ii) N(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e vale il seguente:

Teorema (trasformata) - Sia f razionale, $f(t) = N(t)/D(t)$. Siano i polinomi N, D primi tra loro e siano verificate le condizioni (1). Allora f è trasformabile secondo Fourier in L^2 e, indicati con $s_1, \dots, s_N$ i poli di f , si ha:

$$\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega) = \begin{cases} 2\pi j \sum_{\text{Im } s_i > 0} \text{Res } [f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega < 0 \\ -2\pi j \sum_{\text{Im } s_i < 0} \text{Res } [f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega > 0 \end{cases}.$$

Tale Teorema si estende immediatamente al caso dell'antitrasformata (con alcune minori modifiche). Vale infatti il seguente:

Teorema (antitrasformata) - Sia F razionale, $F(\omega) = P(\omega)/Q(\omega)$. Siano i polinomi P, Q primi tra loro e siano verificate le condizioni

- i) $\text{gr } P < \text{gr } Q$
- ii) $Q(\omega) \neq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$.

Allora $F \in L^2$ e, indicati con $s_1, \dots, s_N$ i poli di F , l'antitrasformata f di F è data da:

$$f(t) = \begin{cases} -j \sum_{\text{Im } s_i < 0} \text{Res } [F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t < 0 \\ j \sum_{\text{Im } s_i > 0} \text{Res } [F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

Entrambi i teoremi precedenti si provano utilizzando la teoria dei Residui e il Lemma di Jordan nella versione sotto riportata, come è stato dettagliatamente illustrato a lezione. In Appendice sono riportati i principali risultati relativi all'integrazione in campo complesso, risultati visti nell'ambito del corso di "Applicazioni di Matematica" [o "Complementi di Matematica" per gli studenti di IDT-TLS]

Lemma di Jordan - Sia $g(s)$ una funzione complessa, analitica per $|s|$ grande e tale che $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$. Allora:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} g(s)e^{jms} ds = 0$$

se:

- i) C_R è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio R , contenuta nel semipiano $\text{Im } s > 0$ e m è un numero reale positivo (vedi figura 1 dopo Appendice);

oppure se:

ii) C_R è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio R , contenuta nel semipiano $\text{Im } s < 0$ e m è un numero reale negativo (vedi figura 2 dopo Appendice).

2 Appendice

2.1 Curva regolare in $\mathbb{C}$

Sia $[a, b]$ un intervallo **limitato e chiuso** della retta reale. Una *curva regolare* è una funzione $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = x(t) + jy(t)$$

dove le funzioni reali $x = x(t), y = y(t)$ sono funzioni derivabili con derivata continua nell'intervallo aperto (a, b) [i.e. $x, y \in C^1(a, b)$] e le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ non si annullano contemporaneamente in (a, b) .

Tale concetto è del tutto analogo a quello visto nell'ambito dei corsi di Analisi Matematica, con la sola differenza che ora esso è formulato usando le notazioni complesse.

Se le due funzioni x, y sono di classe C^1 in tutto (a, b) eccetto un numero finito di punti e/o le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ si annullano contemporaneamente in un numero finito di punti, allora γ si dice *generalmente regolare*.

Geometricamente una curva regolare è rappresentata da una "linea" (detta *sostegno della curva*) avente tangente in ogni punto, salvo, al più, gli estremi; una curva generalmente regolare è invece rappresentata da una "linea" che ammette tangente in ogni punto eccetto un numero finito di punti.

Esempio. La curva

$$\gamma(t) = \rho e^{jt} + s_0, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro s_0 , raggio ρ e percorsa in senso antiorario. Infatti ponendo $\gamma(t) = x(t) + jy(t)$, $s_0 = x_0 + jy_0$ e utilizzando le formule di Eulero si ottiene

$$x(t) + jy(t) = \rho[\cos t + j \sin t] + x_0 + jy_0$$

da cui, uguagliando parte reale e parte immaginaria di ambo i membri, si ha

$$x(t) = \rho \cos t + x_0$$

$$y(t) = \rho \sin t + y_0$$

che, come è noto, è l'equazione in forma parametrica di una circonferenza di centro (x_0, y_0) , raggio ρ e percorsa in senso antiorario (per $t \in [0, 2\pi]$).

Una curva γ si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva γ si dice *semplice* se presi $t_1, t_2 \in (a, b)$ con $t_1 \neq t_2$ risulta $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare; si chiama *lunghezza di γ* il numero reale

$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |x'(t) + jy'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

2.2 Definizione di Integrale in $\mathbb{C}$

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare e sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua sulla curva. Si chiama *integrale di f esteso a γ* il numero complesso

$$\int_\gamma f(s) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Proprietà dell'integrale in $\mathbb{C}$

1. **Linearità** (c_1, c_2 costanti complesse):

$$\int_\gamma [c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)] ds = c_1 \int_\gamma f_1(s) ds + c_2 \int_\gamma f_2(s) ds$$

2. **Ordine:**

$$\int_\gamma f(s) ds = - \int_{-\gamma} f(s) ds.$$

3. **Additività:**

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(s) ds = \int_{\gamma_1} f(s) ds + \int_{\gamma_2} f(s) ds$$

4. **Modulo dell'integrale:** vale la maggiorazione :

$$\left| \int_\gamma f(s) ds \right| \leq L_\gamma \max_{s \in \gamma} |f(s)|$$

dove L_γ indica la lunghezza della curva γ .

2.3 Teoremi di Cauchy per l'integrale

Teorema 1 (di Cauchy) *Sia γ una curva regolare (o generalmente regolare) semplice e chiusa e sia f una funzione analitica all'interno di γ e continua su γ . Allora:*

$$\int_{\gamma} f(s) ds = 0.$$

Tale Teorema esprime il fatto che in una regione in cui f è analitica, l'integrale è indipendente dal cammino.

Teorema 2 (1° Teorema dei Residui) *Sia Γ una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo. Sia H analitica all'interno di Γ eccetto un numero FINITO di punti $s_1, s_2, \dots, s_n$. Sia infine H continua su Γ . Allora*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} H(s) ds = \text{Res}[H, s_1] + \text{Res}[H, s_2] + \dots + \text{Res}[H, s_n]$$

dove la scrittura $\text{Res}[H, s_i]$ indica il Residuo di H in s_i .

Il $\text{Res}[H, s_i]$ è stato definito nell'ambito del corso di Applicazioni di Matematica (o Complementi di Matematica) ai quali si rimanda. Qui ricordiamo soltanto le formule per il calcolo di tale Residuo nel caso in cui H sia una funzione del tipo

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{jms}$$

con N, D polinomi primi tra loro e m parametro reale.

- Se s_0 è una radice semplice di D , allora

$$\text{Res}[H(s), s_0] = \lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0) \frac{N(s)}{D(s)} e^{jms}.$$

- Se s_0 è una radice doppia di D , allora

$$\text{Res}[H(s), s_0] = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{d}{ds} \left[(s - s_0)^2 \frac{N(s)}{D(s)} e^{jms} \right].$$

- In generale, se s_0 è una radice di ordine $n > 1$ di D , allora

$$\text{Res}[H(s), s_0] = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left[(s - s_0)^n \frac{N(s)}{D(s)} e^{jms} \right].$$

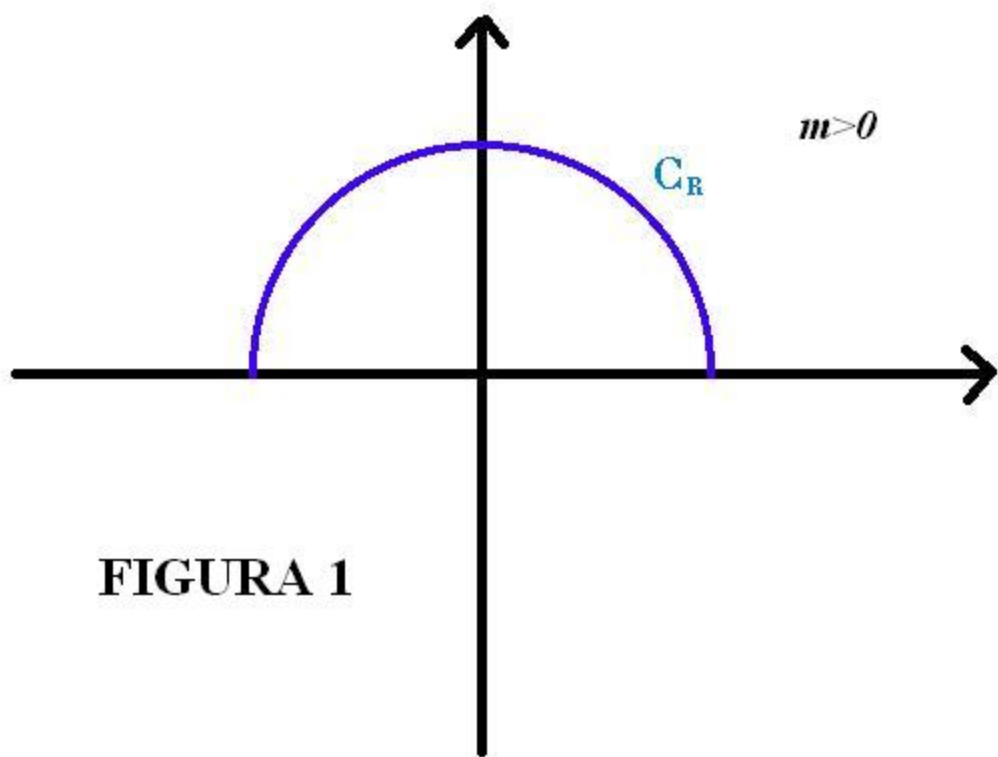


FIGURA 1

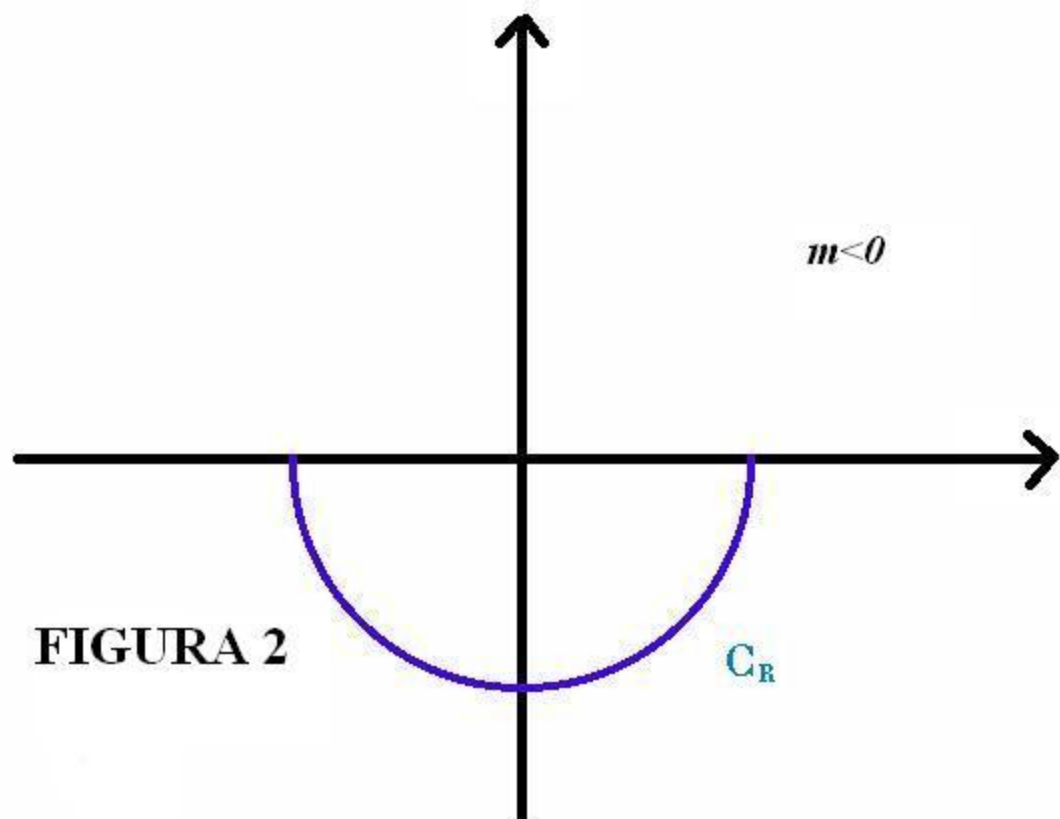


FIGURA 2

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2006-2007

Tracce delle lezioni del 7 e 8 febbraio 2007

February 8, 2007

1 Derivazione

Teorema (Derivazione) Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R}), f' \in L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$\mathfrak{F}\{f'\} = j\omega \mathfrak{F}\{f\}.$$

Corollario Sia $f \in C^N(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R}), f' \in L^1(\mathbb{R}), \dots, f^{(N)} \in L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$\mathfrak{F}\{f^{(N)}\} = (j\omega)^N \mathfrak{F}\{f\}.$$

In particolare, se $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R}), f' \in L^1(\mathbb{R}), f'' \in L^1(\mathbb{R})$, allora

$$\mathfrak{F}\{f''\} = -\omega^2 \mathfrak{F}\{f\}.$$

Si osservi che l'ipotesi " $f \in C^1(\mathbb{R})$ " nel precedente Teorema non può essere tralasciata, come mette in luce l'esempio dell'impulso rettangolare.

2 Integrabilità della trasformata

Ricordiamo la formula dell'antitrasformata:

Teorema Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si supponga inoltre che f sia sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso $[-L, L]$. Ciò premesso si ha

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1)$$

Se $F \in L^1(\mathbb{R})$ allora l'integrale in (1) converge non solo nel senso del valore principale, ma anche in senso generalizzato (o improprio). In altre parole, se $F \in L^1(\mathbb{R})$ la formula dell'antitrasformata diviene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ può accadere che la sua trasformata $F = \mathfrak{F}\{f\}$ non appartenga a $L^1(\mathbb{R})$, come illustra, ad esempio il caso dell'impulso rettangolare. Pertanto, come si dice, lo spazio L^1 non è chiuso rispetto all'operatore "trasformata di Fourier".

Condizioni sufficienti affinché la trasformata appartenga a $L^1(\mathbb{R})$ si ottengono come immediata conseguenza del teorema della derivazione. Si hanno infatti i seguenti:

Corollario 1 *Sia $f \in C^n(\mathbb{R})$, $f, f', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$; allora $F = o(\omega^{-n})$ per $|\omega| \rightarrow \infty$, ossia*

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{F(\omega)}{\omega^{-n}} = 0$$

dove $F = \mathfrak{F}\{f\}$.

Il significato di tale Corollario è il seguente: "la trasformata di Fourier F di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ tende a zero (per $|\omega| \rightarrow +\infty$) tanto più velocemente, quanto più f è "liscia" (e con derivate in $L^1(\mathbb{R})$)"

Corollario 2 *Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$; allora $F \in L^1(\mathbb{R})$ (e quindi nella formula della antitrasformata si può omettere la sigla v.p., in quanto, in tal caso, (1) e (2) coincidono.*

3 Il Teorema del campionamento

Un'importante applicazione della trasformata di Fourier nell'ambito della trasmissione di segnali è data dal Teorema di Shannon (o del campionamento): si veda Cap. 3.14 in M. Marini "Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche", Edizioni Cedam, 1999.

4 Altre proprietà

1. **Integrazione** - Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dove $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, si ha

$$\mathfrak{F}\{g\} = \frac{F(\omega)}{j\omega}.$$

Poiché la trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$ è una funzione continua per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, dalla proprietà precedente si ha anche il

Corollario Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dove $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, si ha

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F(\omega) = 0.$$

2. **Convoluzione** - Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Si chiama prodotto di convoluzione di f e g , e si indica con $f * g$, la funzione

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Tale definizione è lecita, nel senso che è possibile provare che

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}) \implies f * g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Teorema - Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, $G(\omega) = \mathfrak{F}\{g\}$, si ha

$$\mathfrak{F}\{f * g\} = F(\omega)G(\omega).$$

Se **inoltre** f, g sono nulle sul semiasse negativo, ossia se per $t < 0$ si ha

$$f(t) = g(t) = 0,$$

allora è immediato verificare che (per $t > 0$)

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (3)$$

Il prodotto di convoluzione interviene nella risolubilità di equazioni (o sistemi) differenziali lineari a coefficienti costanti. A titolo di esempio, per l'equazione lineare scalare

$$y' = cy + b(t), \quad (4)$$

dove c è una costante reale e b una funzione continua (a tratti) in $[0, \infty)$ si ha

$$y(t) = e^{ct}y(0) + e^{ct} * b(t). \quad (5)$$

Si osservi che la funzione e^{ct} è una soluzione dell'equazione lineare omogenea

$$x'(t) = cx(t); \quad (6)$$

precisamente è la soluzione x di (6) tale che $x(0) = 1$. La formula (5) mette in luce che per la risolubilità di (4) è sufficiente allora determinare tale soluzione. Così, ad esempio, tutte le soluzioni di

$$y' + 7y = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

sono date da

$$y(t) = e^{-7t}y(0) + e^{-7t} * \frac{2t}{t^2 + 1}.$$

5 Trasformata di Laplace

5.1 Definizione

Introduzione, Preliminari, Funzioni di classe Λ , ascissa di convergenza: si veda Cap. 1.1, 1.2, 1.3 del testo M. Marini "Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche", Edizioni Cedam, 1999.

Si ha poi il seguente:

Teorema. Sia $f \in \Lambda$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza. Allora la funzione $f(t)e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $x > \alpha_f$.

In virtù di tale teorema, possiamo porre allora la seguente

Definizione. Sia $f \in \Lambda$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza. Si chiama **trasformata di Laplace di f** , e si indica con $L[f(t)]$, la trasformata di Fourier di $f(t)e^{-xt}$, con $x > \alpha_f$, ossia

$$L[f(t)] = \mathfrak{F} \{ f(t)e^{-xt} \}, \text{ dove } x > \alpha_f. \quad (7)$$

Ricordando la definizione di trasformata di Fourier, si ottiene allora la ben nota

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

dove s è un qualunque numero complesso con $\operatorname{Re} s = x > \alpha_f$.

5.2 Principali proprietà

Sia $f \in \Lambda$, α_f la sua ascissa di convergenza e $F(s) = L[f(t)]$ la sua trasformata di Laplace. Allora:

- F è analitica per ogni s tale che $\operatorname{Re} s > \alpha_f$.
- Vale il seguente

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} F(s) = 0.$$

- linearità.

$$L[c_1 f(t) + c_2 g(t)] = c_1 L[f(t)] + c_2 L[g(t)]$$

dove anche $g \in \Lambda$ e $c_i, i = 1, 2$, sono numeri complessi.

- traslazione temporale.

$$L[f(t - A)] = F(s)e^{-As}, \text{ con } A > 0;$$

- traslazione in frequenza (o smorzamento).

$$L[f(t)e^{\gamma t}] = F(s - \gamma), \text{ con } \gamma \in \mathbb{C};$$

- derivazione. Sia $f \in C^1[0, +\infty)$, $f, f' \in \Lambda$. Allora

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0+)$$

dove $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$.

- integrazione. Posto $g(t) = \int_0^t f(r)dr$, sia anche $g \in \Lambda$. Allora

$$L[g(t)] = \frac{F(s)}{s}$$

Si confrontino queste proprietà con le "corrispondenti" viste per la trasformata di Fourier, evidenziandone le analogie e differenze.

5.3 Formula di Bromwich-Mellin

Si veda Cap. 1.13.1, 1.13.2, del testo M. Marini "Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche", Edizioni Cedam, 1999.

Formula di Bromwich-Mellin - Sia $f \in \Lambda$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza. Sia inoltre f sviluppabile in serie di Fourier in $[0, L], \forall L > 0$. Indicata con $F(s) = L[f(t)]$ la sua trasformata di Laplace, si ha per $t > 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} v.p. \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

dove $x > \alpha_f$.

Tale formula, nota anche sotto il nome di formula di Riemann-Fourier, puo' essere facilmente ottenuta dalla formula di inversione per la trasformata di Fourier e da (7).

Nel caso in cui F sia razionale, vale il seguente:

Teorema Sia F razionale. Allora esiste $f \in \Lambda$ tale che $F(s) = L[f(t)]$ se e solo se F è propria.

Utilizzando poi la teoria dei residui e il Lemma di Jordan, si puo' provare il seguente:

Teorema Sia F razionale propria, $F(s) = N(s)/D(s)$ con N, D polinomi primi tra loro. Allora l'antitrasformata di Laplace di $F(s)$ è data, per $t > 0$, dalla funzione

$$f(t) = \sum_{s_i} \text{Res}[F(s)e^{st}, s_i],$$

dove s_i rappresentano gli zeri del polinomio D , i.e. le singolarità di F .

6 Equazioni differenziali lineari - Richiami

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (8)$$

dove le funzioni a, b sono continue a tratti in un intervallo I dell'asse reale. Allora:

1. *Per ogni $x_0 \in I$ e per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione $y = y(x)$ di (8) tale che $y(x_0) = c_1, y'(x_0) = c_2$.*
2. *Ogni soluzione di (8) è persistente, ossia è definita in tutto l'intervallo I .*
3. *L'insieme delle soluzioni di (8) è uno spazio lineare di dimensione 2 .*

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2006-2007

Tracce delle lezioni del 14,15 e 16 febbraio 2007

February 14, 2007

1 Esempi

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (1)$$

dove le funzioni a, b sono continue a tratti in un intervallo $I = (\bar{x}, +\infty)$ dell'asse reale (non è escluso il caso in cui I coincida con $\mathbb{R}$, ossia che $\bar{x} = -\infty$).

Se le funzioni a e b sono costanti, allora (1) diviene un'equazione "a coefficienti costanti" la cui risolubilità è stata trattata nei corsi di Analisi e può essere affrontata anche utilizzando la trasformata di Laplace. Esistono tuttavia nelle applicazioni vari casi in cui il modello matematico è rappresentato da un'equazione tipo (1) con a e/o b non a coefficienti costanti. Un primo esempio è l'equazione di Schrödinger monodimensionale

$$w'' + \frac{2m}{H^2}(E - V(x))w = 0 \quad (2)$$

dove :

m rappresenta la massa dell'elettrone;

H è la costante di Planck normalizzata (i.e. $H = h/(2\pi)$, h = costante di Planck);

E è l'energia dell'elettrone;

V è il potenziale applicato;

w è una funzione legata alla funzione d'onda ($|w(x)|^2$ rappresenta la probabilità che l'elettrone occupi effettivamente la posizione x).

L'equazione (2) è di tipo (1) con

$$a(x) = 0, \quad b(x) = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x)).$$

Nel corso della lezione è stata analizzata l'equazione (2) nei casi seguenti:

1. Gradino di potenziale :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{con } V_0 > E > 0) \quad (3)$$

2. Barriera di potenziale :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{se } 0 < x < X \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{con } V_0 > E > 0). \quad (4)$$

3. Buca di potenziale :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{se } 0 < x < X \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{con } V_0 < E < 0). \quad (5)$$

Un altro esempio è l'**equazione di Bessel**, ossia l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \quad x \in (0, +\infty) \quad (6)$$

dove n è un parametro reale, equazione che sarà esaminata in seguito.

2 Studio qualitativo.

Si consideri di nuovo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea (1). Come si è detto, nel caso in cui i coefficienti a e/o b non siano costanti (o costanti a tratti), determinare tutte le soluzioni di (1) può non essere semplice. Poiché lo spazio delle soluzioni di (1) ha dimensione 2, per

la risolubilità di (1) è sufficiente determinare due soluzioni di (1) linearmente indipendenti. In realtà è sufficiente conoscerne una, come ora mostreremo.

Moltiplicando l'equazione (1) per $e^{\int_{x_0}^x a(s)ds}$ si ottiene

$$e^{\int_{x_0}^x a(s)ds} y'' + a(x) e^{\int_{x_0}^x a(s)ds} y' + b(x) e^{\int_{x_0}^x a(s)ds} y = 0$$

ossia

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0, \quad (7)$$

dove

$$p(x) = e^{\int_{x_0}^x a(s)ds}$$

$$q(x) = b(x) e^{\int_{x_0}^x a(s)ds}$$

L'equazione (7) prende nome di *equazione lineare in forma autoaggiunta* ed è **equivalente** a (1), nel senso che

le soluzioni di (1) sono tutte e sole quelle di (7).

Si osservi in particolare che la funzione p in (7) è positiva. Vale il seguente:

Teorema - Sia u una soluzione di (7) e sia $u(x) \neq 0$ per $x \in [x_0, x_1] \subset I$. Allora la funzione

$$v(x) = u(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{p(r)u^2(r)} dr \quad (8)$$

è anch'essa soluzione di (7) ed è linearmente indipendente da u .

Per verificare che v è soluzione di (7), è sufficiente derivare e sostituire in (7). Per verificare che u e v siano linearmente indipendenti, come dovrebbe essere ben noto, è sufficiente provare che il determinante della matrice wronskiana

$$\begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{pmatrix}$$

è positivo.

In virtù di quanto detto, ogni soluzione y di (7) [o equivalentemente di (1)] è rappresentata dalla formula

$$y(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x)$$

dove u, v sono soluzioni di (7), v è data da (8) e c_1, c_2 sono due opportune costanti reali.

3 L'oscillazione

Definizione - Sia y una soluzione di (1), diversa dalla soluzione nulla; y si dice *oscillante* se esiste una successione $\{x_n\}$, con $x_n \rightarrow +\infty$, tale che $y(x_n) = 0$, ossia se y ha infiniti zeri che si "accumulano all'infinito". In caso contrario y si dice *nonoscillante*.

Poiché per (1) vale la proprietà dell'unicità della soluzione rispetto ai dati iniziali, il grafico di una soluzione oscillante di (1) "taglia" l'asse x infinite volte (per $x \rightarrow +\infty$).

Vale il seguente:

Teorema di Sturm - *Tutte le soluzioni non banali di (1) hanno lo stesso carattere rispetto all'oscillazione, ossia o tutte oscillano o tutte non oscillano.*

In virtù di tale risultato allora non possono coesistere per una stessa equazione di tipo (1) soluzioni oscillanti e nonoscillanti; pertanto (1) si dice *oscillante* o *nonoscillante* a seconda che tutte le sue soluzioni (diverse dalla soluzione nulla) siano oscillanti o nonoscillanti.

E' evidente che (1) è oscillante se e solo se lo è (7). Cio' premesso, si ha il seguente:

Teorema di confronto di Sturm - *Si considerino le due equazioni*

$$(p_1(x)y')' + q_1(x)y = 0, \quad (9)$$

$$(p_2(x)y')' + q_2(x)y = 0, \quad (10)$$

dove per ogni x sufficientemente grande

$$p_1(x) \geq p_2(x) \quad \text{e} \quad q_1(x) \leq q_2(x).$$

Se (9) è oscillante, allora (10) è oscillante

Se (10) è nonoscillante, allora (9) è nonoscillante.

L'equazione (9) è chiamata *minorante* e (10) *maggiorante*. Il motivo di tale denominazione è dovuto al caso in cui $p_1(x) = p_2(x) = 1$. In questo caso tali equazioni si riducono, rispettivamente, a

$$y'' + q_1(x)y = 0,$$

$$y'' + q_2(x)y = 0,$$

e tale denominazione è evidente, in quanto per ogni x grande si ha $q_1(x) \leq q_2(x)$.

Il Teorema di confronto di Sturm non sempre consente di stabilire se una assegnata equazione lineare del secondo ordine sia oscillante oppure no. Ad esempio, tale teorema non è applicabile all'equazione

$$y'' + \frac{1}{x}y = 0. \quad (11)$$

Un altro criterio di oscillazione è il seguente

Teorema di Leighton -

(i) L'equazione (7) è oscillante se

$$\int^{\infty} \frac{1}{p(x)} dx = \int^{\infty} q(x) dx = \infty.$$

(ii) L'equazione (7) è nonoscillante se

$$\int^{\infty} \frac{1}{p(x)} dx < +\infty, 0 \leq \int^{\infty} q(x) dx < +\infty$$

oppure se

$$q(x) \leq 0 \quad \text{per ogni } x \text{ sufficientemente grande.}$$

• ESEMPI

Applicando il Teorema di Leighton si ottiene facilmente:

1) L'equazione (11) è oscillante. Così pure è oscillante l'equazione

$$y'' + \frac{2x^2 + 1}{4x^2 + 4}y = 0.$$

2) L'equazione

$$y'' + \frac{1 - 2x^2}{4x^2 + 4}y = 0$$

è nonoscillante.

3) L'equazione di Bessel (6) è oscillante. Infatti, in forma autoaggiunta essa diviene

$$(xy')' + \frac{x^2 - n^2}{x}y = 0,$$

e quindi dal criterio di Leighton (parte i) si ha l'asserto, in quanto

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad q(x) = \frac{x^2 - n^2}{x}.$$

4 L'equazione di Bessel (caso n intero positivo)

Come detto, si chiama **equazione di Bessel** l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \quad x \in (0, +\infty) \quad (\text{B})$$

dove n è un parametro reale.

Nel caso particolare in cui n sia un intero nonnegativo, si può dimostrare che tra le soluzioni di (B) vi sono le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \quad (12)$$

Le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie* e godono delle seguenti proprietà:

1. se n è pari, allora J_n è una serie di polinomi pari;
2. se n è dispari, allora J_n è una serie di polinomi dispari;
3. $J_0(0+) = 1$; $J_n(0+) = 0$ per n intero positivo.
4. Le funzioni J_n sono funzioni oscillanti e smorzate, ossia $\lim_{x \rightarrow +\infty} J_n(x) = 0$.

5 La funzione Gamma Euleriana

Si chiama *Gamma Euleriana* la funzione

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Tale integrale converge per ogni valore positivo del parametro reale x e quindi la funzione Gamma Euleriana è definita in $(0, \infty)$. Essa gode delle seguenti proprietà (di immediata verifica):

1. $\Gamma(1) = 1$;

$$2. \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \text{ (e quindi } \Gamma(2) = 1);$$

$$3. \Gamma(x+2) = x(x+1)\Gamma(x);$$

$$4. \Gamma(x+3) = x(x+1)(x+2)\Gamma(x);$$

.....

$$5. \Gamma(x+n) = x(x+1).....(x+n-1)\Gamma(x);$$

Ponendo in (5) $x = 1$ si ha poi l'importante proprietà

$$\Gamma(n+1) = n!$$

ossia **la funzione Gamma Euleriana è l'estensione al caso continuo del concetto di fattoriale.**

Come conseguenza delle relazioni 1) ,...5) si ha che la funzione Γ è nota, quando siano noti i valori che Γ assume in $(0, 1]$. Infatti se Γ è nota in $(0, 1]$, usando 2) si ottiene che Γ è nota anche in $(1, 2]$. Usando poi 3) si ottiene che Γ è nota anche in $(2, 3]$, e così via. Tale risultato può essere migliorato. Infatti è possibile provare che per $x \in (0, 1/2]$ vale la relazione

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

e da tale relazione ne segue che se Γ è nota in $(0, 1/2]$, allora Γ è nota anche in $[1/2, 1)$.

In conclusione:

I valori della funzione Γ sono noti, non appena siano noti i valori che Γ assume in $(0, 1/2]$.

Per tale motivo i valori di Γ vengono usualmente tabulati per $x \in (0, 1/2]$.

Usando le relazioni 2), ...5) è possibile poi estendere la definizione della funzione Γ anche sul semiasse negativo, ad eccezione dei punti $0, -1, -2, -3, \dots$. Infatti da 2) si ha per $x \neq 0$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1);$$

poichè il secondo membro ha senso anche per $x \in (-1, 0)$ si può usare tale relazione per estendere la definizione di Γ anche all'intervallo $(-1, 0)$. In altre parole si pone

$$\Gamma(x) =_{\text{def}} \frac{1}{x} \Gamma(x+1) \quad \text{se } x \in (-1, 0).$$

Usando poi le relazioni 3)..5) si può procedere nell'estensione della definizione di Γ sul semiasse negativo. Precisamente si ha

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &=_{\text{def}} \frac{1}{x(x+1)} \Gamma(x+2) & \text{se } x \in (-2, -1) \\ \Gamma(x) &=_{\text{def}} \frac{1}{x(x+1)(x+2)} \Gamma(x+3) & \text{se } x \in (-3, -4) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Si osservi infine che per quanto riguarda il comportamento della funzione Γ nei punti $x = 0, x = -1, x = -2, \dots$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow -n} |\Gamma(x)| = +\infty \tag{13}$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$

6 Funzioni di Bessel (caso n reale)

Indicata con Γ la funzione Gamma Euleriana, per ogni $n \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \tag{14}$$

sono soluzioni dell'equazione di Bessel

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \quad x \in (0, +\infty) \tag{B}$$

Le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie*. Se n è intero positivo, poiché $\Gamma(k+n+1) = (n+k)!$, l'espressione (14) si riduce a quella vista in precedenza.

Nel caso particolare in cui n sia un intero negativo, i primi n termini della serie (14) sono nulli, in quanto $|\Gamma(k+n+1)| = +\infty$. Ad esempio, per $J_{-7}(x)$ si ha

$$J_{-7}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-6)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-7}. \quad (15)$$

Poiché $|\Gamma(k-6)| = +\infty$ se $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, i primi 7 termini di (15) sono nulli e quindi la somma in tale serie inizia effettivamente da $k = 7$, ossia

$$J_{-7}(x) = \sum_{k=7}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-6)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-7}.$$

Vale il seguente:

Teorema

- (i) Fissato $n \in \mathbb{R}$, le funzioni J_n e J_{-n} sono entrambe soluzioni di (B).
- (ii) Se n è intero, i.e. $n \in \mathbb{Z}$, allora

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x),$$

e quindi J_n e J_{-n} sono linearmente dipendenti.

- (iii) Se n è reale, ma non intero, i.e. $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, allora J_n e J_{-n} sono linearmente indipendenti.

Pertanto se $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ricordando che lo spazio delle soluzioni di (B) ha dimensione 2, dal Teorema precedente (punto (iii)) si ha che tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x), \quad (16)$$

dove c_1, c_2 sono due arbitrarie costanti reali. Scegliendo poi in (16)

$$c_1 = \frac{\cos \pi n}{\sin \pi n}, \quad c_2 = \frac{-1}{\sin \pi n}$$

si ottiene la soluzione di (B) data da

$$Y_n(x) = \frac{\cos \pi n}{\sin \pi n} J_n(x) - \frac{1}{\sin \pi n} J_{-n}(x) \quad (n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Le funzioni Y_n si chiamano *funzioni di Bessel di seconda specie* e, per quanto appena detto, sono anch'esse soluzioni di (B).

Nel caso infine in cui n sia intero, si definiscono le funzioni di Bessel di seconda specie nel modo seguente:

$$Y_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} \left(\frac{\cos \pi p}{\sin \pi p} J_p(x) - \frac{1}{\sin \pi p} J_{-p}(x) \right) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

e si può provare che anche in tal caso le funzioni Y_n sono soluzioni di (B).

Inoltre le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n sono linearmente indipendenti da J_n , sia nel caso n intero che nel caso $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$; pertanto per ogni n reale tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$d_1 J_n(x) + d_2 Y_n(x),$$

dove d_1 e d_2 sono due arbitrarie costanti reali.

Infine si chiamano *funzioni di Hankel* le funzioni

$$H_n^\pm(x) = J_n(x) \pm j Y_n(x)$$

dove j rappresenta l'unità immaginaria.

7 Relazioni di ricorrenza

Per le funzioni di Bessel valgono le seguenti formule:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) &= x^n J_{n-1}(x) \\ \frac{d}{dx} (x^{-n} J_n(x)) &= -x^{-n} J_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Da tali formule si ottengono poi le cosiddette *formule di ricorrenza*

$$\begin{aligned} x J_n'(x) &= x J_{n-1}(x) - n J_n(x) \\ x J_n'(x) &= n J_n(x) - x J_{n+1}(x) \\ 2 J_n'(x) &= J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \\ 2n J_n(x) &= x J_{n-1}(x) + x J_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Le precedenti formule continuano a valere anche per le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n .

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2006-2007

Traccia della lezione del 21 febbraio 2007

February 22, 2007

1 Spazi euclidei

Sia V uno spazio vettoriale complesso. Si chiama *prodotto scalare* in V (e si indica con il simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$) ogni applicazione $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \overline{\langle y, x \rangle} & \forall x, y \in V \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle & \forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{C} \\ \langle x_1 + x_2, y \rangle &= \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle & \forall x_1, x_2, y \in V \\ \langle x, x \rangle &\text{ è } \geq 0, \text{ e } = 0 \text{ se e solo se } x = \underline{0} & \forall x \in V \end{aligned} \quad (1)$$

dove $\overline{\langle y, x \rangle}$ indica il coniugato del numero complesso $\langle y, x \rangle$.

Uno spazio vettoriale V dotato di prodotto scalare, chiama *spazio euclideo*.

Esempio 1 - Come è ben noto dal corso di Geometria, indicati con

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

due vettori in $\mathbb{R}^n$, l'applicazione

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

verifica le condizioni (1) ed è quindi un prodotto scalare.

Esempio 2 - Indicato con I un intervallo dell'asse reale (eventualmente illimitato) si consideri lo spazio vettoriale

$$L^2(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{C} \text{ tali che } \int_I |f(t)|^2 dt < +\infty \right\}.$$

In tale spazio l'applicazione definita da

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t) \overline{g(t)} dt, \quad \forall f, g \in L^2(I)$$

è un prodotto scalare (si ricordi che due funzioni $f_1, f_2 \in L^2(I)$ sono uguali se coincidono in tutto I , eccetto, al più, un insieme di misura nulla).

Ogni spazio euclideo è uno spazio normato (e quindi metrico) con norma definita da

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (2)$$

NON vale, in generale, il viceversa, ossia possono esistere spazi normati che non sono euclidei. Un esempio in tal senso è lo spazio $L^1(I)$ formato dalle funzioni assolutamente integrabili in I .

Poiché ogni spazio euclideo V è metrico, ossia è possibile definire in esso una distanza, possiamo definire in V anche una nozione di convergenza. Si ha allora la seguente

Definizione 1 - Uno spazio euclideo v si dice *completo* se ogni successione fondamentale (o di Cauchy) in V converge in V .

Ad esempio gli spazi $\mathbb{R}^n, L^2(I)$ sono spazi euclidei completi. Lo spazio $\mathbb{Q}^2$ delle coppie di numeri razionali, è uno spazio euclideo, ma non è completo. Per provarlo è sufficiente considerare la successione (p_n, q_n) con

$$p_n = q_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

che è fondamentale e converge a $(e, e) \notin \mathbb{Q}^2$.

- Sia V uno spazio euclideo. Allora $\forall x, y \in V$ si ha

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle| &\leq \|x\| \|y\| && (\text{disug. Schwarz}) \\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) && (\text{identità parallelogrammo}) \end{aligned}$$

Definizione 2 Sia V uno spazio euclideo. Due elementi $u, v \in V$ si dicono *ortogonali*, e si scrive $u \perp v$, se $\langle u, v \rangle = 0$.

Pertanto per $f, g \in L^2(I)$ si ha

$$f \perp g \iff \int_I f(t) \overline{g(t)} dt = 0.$$

Definizione 3 Sia $S \subset V$ un sottoinsieme composto da elementi a due a due ortogonali. Allora S si chiama *sistema ortogonale*. Tale sistema si chiama poi *massimale* se non esiste un altro sottoinsieme S_1 che sia ortogonale e che contenga propriamente S .

Il concetto di "sistema ortogonale massimale" è quindi la estensione del ben noto concetto di "base", introdotto in $\mathbb{R}^n$.

Ad esempio in $\mathbb{R}^3$ i tre elementi

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

formano un sistema ortogonale massimale (anche ortonormale in questo caso, in quanto tutti gli elementi hanno norma 1). Invece i due vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

formano in $\mathbb{R}^3$ un sistema ortogonale non massimale.

Vale il seguente

Teorema (di rappresentazione)

Sia V uno spazio euclideo completo e sia S un suo sistema ortogonale massimale. Sia inoltre S numerabile, ossia

$$S = \{u_1, u_2, u_3, \dots\}.$$

Allora per ogni $x \in V$ si ha

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n u_n \tag{3}$$

dove i coefficienti c_n , detti coefficienti di Fourier, sono dati da

$$c_n = \frac{\langle x, u_n \rangle}{\|u_n\|^2}. \quad (4)$$

Tale risultato estende il ben noto Teorema della base, visto nel corso di Geometria per lo spazio $\mathbb{R}^n$.

Ad esempio, se $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{u_1, u_2, u_3\}$, dove

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

allora un generico elemento $x \in \mathbb{R}^3$,

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

puo' essere scritto nella forma

$$x = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Poiché in questo caso $\|u_i\| = 1$, si ha anche

$$\begin{aligned} a &= \langle x, u_1 \rangle = \frac{\langle x, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \\ b &= \langle x, u_2 \rangle = \frac{\langle x, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} \\ c &= \langle x, u_3 \rangle = \frac{\langle x, u_3 \rangle}{\|u_3\|^2}, \end{aligned}$$

ossia le relazioni (4).

Il significato di (3) è quindi il seguente. Se uno spazio euclideo V è **completo** ed ha un sistema ortogonale che sia **massimale** e **numerabile**, allora ogni elemento di V si può esprimere come "combinazione lineare infinita degli elementi di S " mediante i coefficienti (4).

2 Un esempio: i polinomi di Legendre

Si consideri lo spazio $L^2[-1, 1]$. Tale spazio è completo e euclideo, con prodotto scalare dato da

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Ciò posto, si considerino i polinomi P_n definiti dalla relazione

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Ad esempio si ha:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1; & P_1(x) &= x; & P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}; \\ P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x; \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Tali polinomi sono chiamati polinomi di Legendre e sono utilizzati in varie situazioni, ad esempio nello studio dell'equazione di Schrodinger. Si può provare che i polinomi di Legendre sono tra loro ortogonali, ossia

$$\langle P_k(x), P_n(x) \rangle = \int_{-1}^1 P_k(x) P_n(x) dx = 0 \text{ se } k \neq n$$

e

$$\langle P_k(x), P_k(x) \rangle = \int_{-1}^1 [P_k(x)]^2 dx = \frac{2k+1}{2}. \quad (5)$$

Inoltre costituiscono un sistema ortogonale massimale in $L^2[-1, 1]$. Pertanto, applicando il Teorema di rappresentazione si ha il seguente risultato:

Teorema - Ogni funzione $f \in L^2[-1, 1]$ è sviluppabile in serie di polinomi di Legendre, ossia

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x),$$

dove

$$c_k = \frac{\langle f(x), P_k(x) \rangle}{\|P_k(x)\|^2} = \frac{\int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx}{\|P_k(x)\|^2}$$

Ricordando la definizione di norma, da (5) si ha poi

$$\|P_k(x)\|^2 = \langle P_k(x), P_k(x) \rangle = \int_{-1}^1 [P_k(x)]^2 dx = \frac{2k+1}{2}.$$

3 Sviluppo in serie di funzioni di Bessel

Come si è visto, l'equazione di Bessel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \quad x \in (0, +\infty), \quad (\text{B})$$

è oscillante, ossia ogni sua soluzione ha infiniti zeri reali positivi che si accumulano all'infinito.

Fissato allora il numero reale n , indichiamo per semplicità di notazioni con J la funzione di Bessel di indice n . Essendo J soluzione di (B), per quanto appena detto, tale funzione ha infiniti zeri reali positivi. Indicati con λ_k tali zeri, si ha quindi

$$J(\lambda_k) = 0.$$

Ciò posto, si chiamano *funzioni di Bessel modificate* le funzioni

$$u_0(x) =_{\text{def}} J(\lambda_0 x)$$

$$u_1(x) =_{\text{def}} J(\lambda_1 x)$$

.....

$$u_k(x) =_{\text{def}} J(\lambda_k x)$$

.....

Consideriamo ora lo spazio vettoriale

$$X = \left\{ f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tali che } \int_0^1 x |f(x)|^2 dx \right\}.$$

Tale spazio può intendersi come uno spazio " $L^2(I)$ con peso x ". Esso è completo e euclideo, con prodotto scalare dato da

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 x f(x) \overline{g(x)} dx$$

Si può provare che in X un sistema ortogonale massimale è dato dalle funzioni di Bessel modificate u_k sopra definite. Pertanto, dal Teorema di rappresentazione si ottiene il seguente risultato.

Teorema - Sia $f \in X$. Allora f è sviluppabile in serie di funzioni di Bessel modificate, ossia

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k(x),$$

dove

$$c_k = \frac{\langle f(x), u_k(x) \rangle}{\|u_k(x)\|^2} = \frac{\int_0^1 x u_k(x) f(x) dx}{\|u_k(x)\|^2}. \quad (6)$$

Poiché poi

$$\|u_k(x)\|^2 = \langle u_k(x), u_k(x) \rangle = \int_0^1 x (u_k(x))^2 dx = \frac{[J'(\lambda_k)]^2}{2},$$

da (6) si ottiene

$$c_k = \frac{2}{[J'(\lambda_k)]^2} \int_0^1 x u_k(x) f(x) dx.$$

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2006-2007

Tracce delle lezioni del 22 e 28 febbraio 2007

February 22, 2007

1 Le distribuzioni

1.1 Definizione

Indichiamo con L^1_{loc} lo spazio vettoriale

$$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ assolutamente integrabili in ogni compatto di } \mathbb{R}\};$$

vogliamo costruire un'estensione di tale spazio.

Ricordiamo che una funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *a supporto compatto* se esiste un intervallo compatto (i.e. limitato e chiuso) $[a, b]$ dell'asse reale tale che $\varphi(t) = 0$ se $t \notin [a, b]$. L'intervallo $[a, b]$, all'esterno del quale φ è nulla, si chiama *supporto di φ* . E' evidente che la funzione φ è univocamente individuata non appena siano noti i valori assunti da φ sul supporto.

Si consideri poi lo spazio vettoriale D formato da tutte le funzioni reali (di variabile reale) infinitamente derivabili e a supporto compatto, ossia

$$D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\}.$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni test* ed è possibile definire in tale spazio una nozione di convergenza (vedi Appendice).

Si osservi poi che il supporto dipende dalla funzione φ considerata. Ad esempio la funzione α data da

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-t^2)} & \text{se } |t| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

appartiene a D ed il suo supporto è $[-1, 1]$. Analogamente la funzione β data da

$$\beta(t) = \begin{cases} e^{-1/(4-t^2)} & \text{se } |t| < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a D ed il suo supporto è $[-2, 2]$.

Ciò premesso si chiama *spazio delle distribuzioni* l'insieme formato da tutti i funzionali (vedi Appendice) lineari e continui definiti su D . Tale spazio si indica con il simbolo $\mathfrak{D}$ ossia

$$\mathfrak{D} = \{T : D \rightarrow \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Pertanto $T \in \mathfrak{D}$ se :

- 1) T è un funzionale, i.e. $T : D \rightarrow \mathbb{R}$
- 2) T è lineare, ossia

$$T(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1T(\varphi_1) + c_2T(\varphi_2), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D.$$

- 3) T è continuo, ossia se $\{\varphi_n\} \xrightarrow{D} \varphi$, allora $\{T(\varphi_n)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi)$.

1.2 Esempi

Sono elementi di $\mathfrak{D}$ (e quindi distribuzioni) i seguenti funzionali (dove φ indica una generica funzione di D):

1. $T_{\sin t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \sin t \, dt$
2. $T_{t^3}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) t^3 \, dt$
3. $T_{e^t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^t \, dt.$

In generale, **fissata** una funzione $f \in L^1_{loc}$, sono elementi di $\mathfrak{D}$ i funzionali del tipo

$$4. T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt,$$

dove φ indica, come prima, una generica funzione di D .

Altre distribuzioni (i.e. elementi di $\mathfrak{D}$) sono poi i funzionali

$$5. \Delta_0(\varphi) = \varphi(0)$$

$$6. \Delta_a(\varphi) = \varphi(a)$$

dove a è un generico numero reale e φ è una generica funzione di D .

Usualmente i funzionali Δ_0, Δ_a vengono indicati con i simboli $\delta(t), \delta(t-a)$.

In riferimento all'Esempio 1., il valore $T_{\sin t}(\varphi)$, assunto dal funzionale T , viene indicato con

$$T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle.$$

Il simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si chiama *crochet*; e la scrittura $\langle \sin t, \varphi(t) \rangle$ si legge *crochet tra $\sin t$ e φ* .

Pertanto le distribuzioni sopra definite negli Esempi 1., 2., 3., 4. si indicano anche con i simboli

$$1. T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \sin t dt$$

$$2. T_{t^3}(\varphi) = \langle t^3, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) t^3 dt$$

$$3. T_{e^t}(\varphi) = \langle e^t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^t dt.$$

$$4. \text{ Per ogni } f \in L^1_{loc} \text{ fissata}$$

$$T_f(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt. \quad (1)$$

Analogamente per le distribuzioni $\delta(t)$ e $\delta(t-a)$ si ha

5.

$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(0)$$

6.

$$\langle \delta(t-a), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(a).$$

1.3 Le distribuzioni come estensione dello spazio L_{loc}^1

Mostriamo che lo spazio $\mathfrak{D}$ è una estensione dello spazio

$$L_{loc}^1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ assolutamente integrabili in ogni compatto di } \mathbb{R}\}.$$

Ricordiamo che in tale spazio due funzioni f, g , coincidono se

$$f(t) = g(t), \quad \text{eccetto un insieme di misura nulla.}$$

Ciò premesso si ha il seguente:

Teorema - Siano $f, g \in L_{loc}^1$. Se

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in D \quad (2)$$

(ossia, usando la notazione con il crochet, se

$$\langle f(t), \varphi(t) \rangle = \langle g(t), \varphi(t) \rangle \quad \forall \varphi \in D) \quad (3)$$

allora f e g coincidono in L_{loc}^1 . Vale poi, ovviamente, il viceversa, ossia se f e g coincidono in L_{loc}^1 , allora (2) [i.e. (3)] è soddisfatta.

Da questo risultato ne segue che le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}$, definite tramite funzioni di L_{loc}^1 , ossia le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}$ il cui crochet è dato da (1) sono "tante quanti gli elementi di L_{loc}^1 ".

In altre parole se indichiamo con $\mathfrak{D}^*$ il sottoinsieme di $\mathfrak{D}$ formato da tutte le distribuzioni il cui crochet è dato da (1), ossia

$$\mathfrak{D}^* = \left\{ T \in \mathfrak{D} : \exists f \in L_{loc}^1 : T(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in D \right\},$$

per il Teorema precedente il sottospazio $\mathfrak{D}^*$ è in corrispondenza biunivoca con L_{loc}^1 , ossia

$$\mathfrak{D}^* \sim L_{loc}^1$$

Quindi lo spazio delle distribuzioni $\mathfrak{D}$ può essere interpretato come una estensione di L_{loc}^1 .

In altre parole, ogni $f \in L_{loc}^1$ può essere pensata come distribuzione (precisamente quella il cui crochet è definito da (1)). Non è difficile poi provare che si tratta di una **effettiva** estensione, in quanto esistono anche distribuzioni,

ad esempio $\delta(t), \delta(t-a)$, che **non** possono essere definite tramite funzioni di L_{loc}^1 , e quindi che non appartengono a $\mathfrak{D}^*$.

Pertanto si ha

$$L_{loc}^1 \sim \mathfrak{D}^* \subsetneq \mathfrak{D}$$

i.e. $\mathfrak{D}^*$ è strettamente contenuto in $\mathfrak{D}$, in quanto, come si è appena affermato, le distribuzioni $\delta(t), \delta(t-a)$, prima considerate, non sono elementi di $\mathfrak{D}^*$.

1.4 Convergenza nello spazio delle distribuzioni

Per analizzare le proprietà delle distribuzioni è utile introdurre in $\mathfrak{D}$ una nozione di convergenza. Precisamente diremo che *una successione di distribuzioni $\{T_n\}$ converge in $\mathfrak{D}$ ad una distribuzione T se la successione numerica $\{T_n(\varphi)\}$ converge a $T(\varphi)$ per ogni $\varphi \in D$* ; ossia

$$\{T_n\} \xrightarrow{\mathfrak{D}} T \quad \text{se} \quad \{T_n(\varphi)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi) \quad \forall \varphi \in D$$

o, equivalentemente,

$$\lim_n T_n \stackrel{\mathfrak{D}}{=} T \quad \text{se} \quad \lim_n T_n(\varphi) \stackrel{\mathbb{R}}{=} T(\varphi) \quad \forall \varphi \in D.$$

Utilizzando tale nozione, si può provare il seguente Teorema (di rappresentazione):

Teorema - *Ogni distribuzione è limite (in $\mathfrak{D}$) di una successione di elementi di L_{loc}^1 , ossia*

$$\overline{L_{loc}^1} = \mathfrak{D}.$$

In altre parole il Teorema precedente afferma che per ogni $T \in \mathfrak{D}$ esiste una successione $\{f_n(t)\}$, contenuta in L_{loc}^1 , che converge in $\mathfrak{D}$ (nel senso sopra specificato) alla distribuzione T .

Ad esempio è facile provare che la distribuzione $\delta(t)$ sopra definita è il limite (in $\mathfrak{D}$) della successione $\{k_n(t)\}$, dove

$$k_n(t) = \begin{cases} n & \text{se } t \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In altre parole la distribuzione $\delta(t)$ gode della **importante** proprietà:

$$\delta(t) \stackrel{\mathfrak{D}}{=} \lim_n k_n(t)$$

2 Appendice

2.1 Convergenza nello spazio delle funzioni test

La nozione di convergenza nello spazio D delle funzioni test si definisce nel seguente modo: diremo che una successione $\{\varphi_n\}$ converge a φ se:

- 1) $\varphi_n, \varphi \in D$;
- 2) esiste un intervallo compatto I tale che $\varphi_n(t) = \varphi(t) = 0$ se $t \notin I$;
- 3) la successione $\{\varphi_n^{(i)}\}$ converge uniformemente a $\varphi^{(i)}$ in $\mathbb{R}$ per $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

ossia $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) : \text{per ogni } n > n(\varepsilon) \text{ si ha } |\varphi_n^{(i)}(t) - \varphi^{(i)}(t)| < \varepsilon \forall t \in I$

- la successione $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a φ in $\mathbb{R}$, i.e.

$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) : \text{per ogni } n > n(\varepsilon) \text{ si ha } |\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \forall t \in I$

- la successione $\{\varphi'_n\}$ converge uniformemente a φ' in $\mathbb{R}$,

$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon) : \text{per ogni } n > \nu(\varepsilon) \text{ si ha } |\varphi'_n(t) - \varphi'(t)| < \varepsilon \forall t \in I$

- la successione $\{\varphi''_n\}$ converge uniformemente a φ'' in $\mathbb{R}$,

-

2.2 Funzionale

Sia V uno spazio vettoriale; si chiama *funzionale in V* ogni funzione F definita in V e a valori in $\mathbb{R}$, i.e.

$$F : V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ad esempio se V è lo spazio delle funzioni continue in $[0, 1]$, sono funzionali in V i seguenti (dove $x = x(t)$ indica una generica funzione continua in $[0, 1]$):

$$F_1(x) = \int_0^1 x(s) ds$$

$$F_2(x) = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$$

$$F_3(x) = 437x(0) + 567x(1)$$

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2006-2007

Traccia della lezione del 1 marzo 2007

February 22, 2007

1 Derivata di una distribuzione

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Allora $f' \in L^1_{loc}$ e quindi f' può essere pensata come distribuzione e sia ha

$$\langle f'(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(t) \varphi(t) dt$$

Utilizzando poi la regola di integrazione per parti si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} f'(t) \varphi(t) dt = - \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi'(t) dt = - \langle f(t), \varphi'(t) \rangle ;$$

pertanto

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \implies \langle f'(t), \varphi(t) \rangle = - \langle f(t), \varphi'(t) \rangle .$$

Tale relazione suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione; si chiama *derivata di T* (nel senso delle distribuzioni) e si indica con DT , la distribuzione definita da

$$\langle DT, \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} - \langle T, \varphi'(t) \rangle , \quad \forall \varphi \in D.$$

Proprietà:

- Ogni distribuzione è derivabile infinite volte.

•

$$\text{Se } f \in C^1(\mathbb{R}) \implies f' \equiv Df$$

- Indicata con $u = u(t)$ la funzione scalino (di Heaveside)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

si ha

$$D[u(t)] = \delta(t).$$

•

$$D[u(t) - u(t - a)] = \delta(t) - \delta(t - a).$$

- **Teorema** - Se $f \in C^1(\mathbb{R}/\{t_0\})$ e $f' \in L^1_{loc}$, allora

$$f(t_0+) = \lim_{t \rightarrow t_0+} f(t), \quad f(t_0-) = \lim_{t \rightarrow t_0-} f(t),$$

esistono finiti e si ha

$$Df = f'(t) + [f(t_0+) - f(t_0-)]\delta(t - t_0).$$

Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 5e^{2t} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ,$$

si ha

$$Df = f'(t) + 5\delta(t).$$

Il teorema precedente si estende poi immediatamente al caso in cui f sia derivabile con derivata continua in tutto $\mathbb{R}$, eccetto un numero finito o un'infinità numerabile di punti.

- La distribuzione $\delta(t)$ è derivabile e si ha

$$\langle \delta'(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} -\varphi'(0), \quad \forall \varphi \in D$$

$$\langle \delta''(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} \varphi''(0), \quad \forall \varphi \in D$$

.....

$$\langle \delta^{(n)}(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} (-1)^n \varphi^{(n)}(0), \quad \forall \varphi \in D.$$

In modo analogo si definiscono le derivate di $\delta(t - a)$.

2 Prodotto di distribuzioni

Ricordiamo che nello spazio L^1_{loc} il prodotto non sempre è definito. Ad esempio la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a L^1_{loc} , ma $f^2 \notin L^1_{loc}$. Tuttavia se $f \in L^1_{loc}$ e $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora il prodotto $f \cdot g$ è, ovviamente, definito e si ha

$$\langle f \cdot g, \varphi \rangle = \langle f, g \cdot \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D.$$

Tale relazione suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione e sia $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si chiama *distribuzione prodotto* $T \cdot g$ la distribuzione definita da

$$\langle T \cdot g, \varphi \rangle = \langle T, g \cdot \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D$$

Nello spazio delle distribuzioni si definisce il prodotto soltanto nel caso precedente, i.e. quando almeno uno dei due fattori è una funzione ("tradizionale") di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Pertanto, ad esempio, non si definiscono i simboli $\delta^2(t)$, $e^{-|t|}\delta(t)$, $(\log t)\delta(t)$, $t^{-7}\delta(t)$.

Provare che

$$\begin{aligned} e^{2t}\delta(t) &= \delta(t); \\ (t^2 + 4)\delta(t) &= 4\delta(t) \\ \sin t \delta(t - \frac{\pi}{2}) &= \delta(t - \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

ESERCIZI

Verificare che

$$\begin{aligned} D[(3 + 5t)\delta'(t - 1)] &= -5\delta'(t - 1) + 8\delta''(t - 1) \\ (t - 1)\delta'(t) &= D[(\sin t)\delta'(t) - u(t)] \\ tDf &= f(t) - 4\delta(t) \end{aligned}$$

dove $f(t) = t[u(t) - u(t - 2)]$.

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2006-2007

Traccia della lezione del 8 marzo 2007

March 6, 2007

1 Prodotto di distribuzioni

Ricordiamo che nello spazio L^1_{loc} il prodotto non sempre è definito. Ad esempio la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a L^1_{loc} , ma $f^2 \notin L^1_{loc}$. Tuttavia se $f \in L^1_{loc}$ e $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora il prodotto $f g$ è, ovviamente, definito e si ha

$$\langle f g, \varphi \rangle = \langle f, g \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D.$$

Tale relazione suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione e sia $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si chiama *distribuzione prodotto* $T g$ la distribuzione definita da

$$\langle T g, \varphi \rangle = \langle T, g \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D$$

Nello spazio delle distribuzioni si definisce il prodotto soltanto nel caso precedente, i.e. quando almeno uno dei due fattori è una funzione ("tradizionale") di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Pertanto, ad esempio, non si definiscono i simboli $\delta^2(t)$, $e^{-|t|}\delta(t)$, $(\log t)\delta(t)$, $t^{-7}\delta(t)$.

Provare che

$$\begin{aligned}e^{2t}\delta(t) &= \delta(t); \\(t^2 + 4)\delta(t) &= 4\delta(t) \\ \sin t \delta(t - \frac{\pi}{2}) &= \delta(t - \frac{\pi}{2}).\end{aligned}$$

ESERCIZI

Verificare che

$$\begin{aligned}D[(3 + 5t)\delta'(t - 1)] &= -5\delta'(t - 1) + 8\delta''(t - 1) \\(t - 1)\delta'(t) &= D[(\sin t)\delta'(t) - u(t)] \\ tDf &= f(t) - 4\delta(t)\end{aligned}$$

dove $f(t) = t[u(t) - u(t - 2)]$.

2 Le distribuzioni temperate

Si consideri lo spazio vettoriale S definito da

$$S = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : t^j \varphi^{(k)}(t) \rightarrow 0 \text{ per } |t| \rightarrow +\infty, j, k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni a decrescenza rapida*. Infatti una funzione φ appartiene a tale spazio se è infinitamente derivabile e tende a zero (per $t \rightarrow \pm\infty$), insieme a tutte le derivate $\varphi^{(i)}$, più velocemente di qualunque potenza di t . Ad esempio la funzione $\varphi(t) = e^{-t^2}$ appartiene a S .

Ricordando la definizione dello spazio D delle funzioni test

$$D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\},$$

si ha

$$D \subsetneq S.$$

E' poi possibile definire in tale spazio una nozione di convergenza.

Ciò premesso si consideri lo spazio formato da tutti i funzionali lineari e continui definiti su S . Tale spazio si indica con il simbolo $\mathfrak{S}$, ossia

$$\mathfrak{S} = \{T : S \rightarrow \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Tenendo conto che

$$D \subsetneq S,$$

si ha allora

$$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{D},$$

ossia $\mathfrak{S}$ è un sottospazio di $\mathfrak{D}$. Gli elementi di $\mathfrak{S}$ sono quindi particolari distribuzioni, che prendono nome di *distribuzioni temperate* e il sottospazio $\mathfrak{S}$ si chiama *spazio delle distribuzioni temperate*.

E' possibile provare che sono distribuzioni temperate (i.e. elementi di $\mathfrak{S}$):

1. le funzioni $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ (quindi, in particolare, sono distribuzioni temperate tutte le funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$);
2. le funzioni $f \in L^1_{loc}$ e a crescita lenta, ossia tali che $\exists M, q \geq 0 :$
 $|f(t)| \leq M(1 + |t|^q)$;
3. le funzioni $f \in L^1[a, b]$ e periodiche di periodo $b - a$;
4. le distribuzioni $\delta(t)$, $\delta(t - a)$;
5. se $T \in \mathfrak{S}$ allora $DT \in \mathfrak{S}$ (in particolare quindi sono distribuzioni temperate $\delta^{(n)}(t)$, $\delta^{(n)}(t - a)$).

Non sono invece distribuzioni temperate le funzioni

$$e^t, e^{-t}, \sinh t, \cosh t.$$

Quindi $\mathfrak{S}$ è un sottospazio proprio di $\mathfrak{D}$.

Si osservi poi che, in virtù di 2., sono distribuzioni temperate le funzioni costanti, i polinomi, le funzioni $\sin t$, $\cos t$.

3 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Sia $\varphi \in S$. Essendo φ a decrescenza rapida si ha $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi φ ammette trasformata di Fourier. Sia pertanto Φ la sua trasformata, ossia $\Phi(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi\}$. Usando le proprietà della trasformata di Fourier in L^1 , è possibile provare che "lo spazio S è chiuso rispetto all'operatore trasformata di Fourier", ossia che vale il seguente:

Lemma - Sia $\varphi \in S$. Allora $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e, indicata con Φ la sua trasformata di Fourier, si ha $\Phi \in S$.

Si ha poi il seguente:

Teorema - Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ e sia F la sua trasformata di Fourier, ossia $F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}$. Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\varphi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\Phi(\omega)d\omega, \quad \forall \varphi \in S$$

ossia

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle f, \Phi \rangle, \quad \forall \varphi \in S$$

o, equivalentemente,

$$\langle \mathcal{F}\{f\}, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle, \quad \forall \varphi \in S.$$

Tale Teorema suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione temperata; si chiama *trasformata di Fourier di T* (nel senso delle distribuzioni) e si indica con $\mathcal{F}_D\{T\}$, la distribuzione temperata definita da

$$\langle \mathcal{F}_D\{T\}, \varphi \rangle =_{\text{def}} \langle T, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle, \quad \forall \varphi \in S.$$

Tale definizione riconduce quindi il calcolo della trasformata $\mathcal{F}_D$ a quello della trasformata "classica" $\mathcal{F}$ (i.e. in L^1 o L^2).

Dal Teorema precedente si ha poi la seguente proprietà

- Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}_D\{f\} \equiv \mathcal{F}\{f\}$, ossia se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora la trasformata nel senso delle distribuzioni di f coincide con quella "classica".

La definizione precedente acquista quindi significato per quelle "funzioni" che non appartengono a $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$.

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2006-2007

Traccia delle lezioni del 14 e 15 marzo 2007

March 14, 2007

1 Le distribuzioni temperate

Ricordiamo quanto visto nella lezione scorsa : si chiama *spazio delle distribuzioni temperate* lo spazio formato da tutti i funzionali lineari e continui definiti su S , dove

$$S = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : t^j \varphi^{(k)}(t) \rightarrow 0 \text{ per } |t| \rightarrow +\infty, j, k = 0, 1, 2, \dots \}. \quad (1)$$

Lo spazio delle distribuzioni temperate si indica con il simbolo $\mathfrak{S}$, ossia

$$\mathfrak{S} = \{ T : S \rightarrow \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo} \}.$$

Ricordiamo poi che lo spazio (1) si chiama invece *spazio delle funzioni a decrescenza rapida*. Indicato con D lo spazio delle funzioni test, introdotto nelle scorse lezioni, chiaramente si ha

$$D \subsetneq S,$$

e quindi

$$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{D},$$

ossia $\mathfrak{S}$ è un sottospazio di D . Gli elementi di $\mathfrak{S}$ sono quindi particolari distribuzioni, che prendono nome di distribuzioni temperate

Vale il seguente

Teorema *Sia T una distribuzione temperata. Allora esiste $n \geq 0$ tale che la derivata di T di ordine n , ossia $D^{(n)}T$ è una funzione a crescita lenta.*

2 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Sia $\varphi \in S$. Essendo φ a decrescenza rapida si ha $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi φ ammette trasformata di Fourier. Sia pertanto Φ la sua trasformata, ossia $\Phi(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi\}$. Usando le proprietà della trasformata di Fourier in L^1 , è possibile provare che "lo spazio S è chiuso rispetto all'operatore trasformata di Fourier", ossia che vale il seguente:

Lemma - Sia $\varphi \in S$. Allora $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e, indicata con Φ la sua trasformata di Fourier, si ha $\Phi \in S$.

Si ha poi il seguente:

Teorema - Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ e sia F la sua trasformata di Fourier, ossia $F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}$. Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\varphi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\Phi(\omega)d\omega, \quad \forall \varphi \in S$$

ossia

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle f, \Phi \rangle, \quad \forall \varphi \in S$$

o, equivalentemente,

$$\langle \mathcal{F}\{f\}, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle, \quad \forall \varphi \in S.$$

Tale Teorema suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione temperata; si chiama *trasformata di Fourier di T* (nel senso delle distribuzioni) e si indica con $\mathcal{F}_D\{T\}$, la distribuzione temperata definita da

$$\langle \mathcal{F}_D\{T\}, \varphi \rangle =_{\text{def}} \langle T, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle, \quad \forall \varphi \in S.$$

Tale definizione riconduce quindi il calcolo della trasformata $\mathcal{F}_D$ a quello della trasformata "classica" $\mathcal{F}$ (i.e. in L^1 o L^2).

Dal Teorema precedente si ha poi la seguente proprietà

- Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}_D\{f\} \equiv \mathcal{F}\{f\}$, ossia se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora la trasformata nel senso delle distribuzioni di f coincide con quella "classica".

La definizione precedente acquista quindi significato per quelle "funzioni" che non appartengono a $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. In particolare vale la seguente tabella per le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni "elementari" a crescita lenta ($A \in \mathbb{R}$)

funzione	→	trasformata
1		$2\pi\delta(\omega)$
t		$2\pi j\delta'(\omega)$
t^n		$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$
e^{jAt}		$2\pi\delta(\omega - A)$
$\sin(At)$		$\pi j[\delta(\omega + A) - \delta(\omega - A)]$
$\cos(At)$		$\pi[\delta(\omega + A) + \delta(\omega - A)]$

Per la distribuzione $\delta(t)$ si ha poi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_D \{\delta(t)\} &= 1 \\ \mathcal{F}_D \{\delta(t - a)\} &= e^{-ja\omega}, \quad a \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Vale infine la proprietà

$$T \in \mathfrak{S} \implies \mathcal{F}_D \{DT\} = j\omega \mathcal{F}_D \{T\}.$$

3 Trasformata di Laplace di distribuzioni

Prima di introdurre la trasformata di Laplace nel senso delle distribuzioni, poniamo le seguenti definizioni.

Definizione 1 - Sia T una distribuzione, ossia $T \in \mathfrak{D}$. Allora T si dice *nulla in un intervallo* (a, b) se

$$\langle T, \varphi(t) \rangle = 0$$

per ogni $\varphi \in D$ e avente supporto in (a, b) .

Definizione 2 - Sia T una distribuzione, ossia $T \in \mathfrak{D}$. Si chiama *insieme nullo di T* , e si indica con N_T , l'unione di tutti gli intervalli aperti (a, b) in cui T è nulla. Il suo complementare in $\mathbb{R}$ si chiama poi *supporto di T* .

Poiché N_T è unione (infinita) di aperti, N_T è un insieme aperto di $\mathbb{R}$. Il supporto di T , essendo il complementare di un aperto è allora un insieme chiuso di $\mathbb{R}$.

Esempi

1. Sia f la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 4 & \text{se } t \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Allora $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e quindi f è una distribuzione. L'insieme nullo N_f è

$$N_f = (-\infty, -\pi) \cup (\pi, +\infty)$$

e. di conseguenza, il supporto di f è $[-\pi, \pi]$ (come ovviamente era lecito attendersi).

2. Sia f la funzione

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Allora $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e quindi f è una distribuzione. L'insieme nullo N_f è

$$N_f = (-\infty, 0)$$

e. di conseguenza, il supporto di f è $[0, +\infty]$ (come ovviamente era lecito attendersi).

3. Per la distribuzione δ si ha poi $N_\delta = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e quindi il supporto di δ è $\{0\}$. Analogamente il supporto di $\delta(t - a)$ è $\{a\}$.

Ciò posto, si ha la seguente:

Definizione 3 - Sia T una distribuzione tale che:

il supporto di T è contenuto in $[0, +\infty)$;

$\exists \beta \in \mathbb{R}$ tale che $Te^{-\beta t}$ è una distribuzione temperata.

Si chiama allora *trasformata di Laplace (nel senso delle distribuzioni)* e si indica con $L_D[f]$, il crochet

$$L_D[T] = \langle Te^{-\beta t}, e^{\beta t} \lambda(t) e^{-st} \rangle \quad (2)$$

dove $\operatorname{Re} s > \beta$ e λ è una funzione tale che

$$\begin{aligned} \lambda &\in C^\infty(\mathbb{R}) \\ \lambda(t) &= 1 \quad \text{se } t \geq -\varepsilon_1 \quad (-\varepsilon_1 < 0) \\ \lambda(t) &= 0 \quad \text{se } t \leq -\varepsilon_2, \quad (-\varepsilon_2 < -\varepsilon_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Si può provare che *il crochet (2) è indipendente dalla scelta della funzione λ (purché siano verificate le condizioni (3)) e dalla scelta di β .*

Il crochet (2) dipende quindi soltanto dalla scelta del numero complesso s e pertanto è una funzione della variabile s , ossia

$$L_D[T] = F(s) = \langle T e^{-\beta t}, e^{\beta t} \lambda(t) e^{-st} \rangle.$$

Pertanto la trasformata di Laplace di una distribuzione T è una **funzione "tradizionale"**, non una distribuzione, come accade invece per la trasformata di Fourier.

Si osservi poi che, per le ipotesi fatte, il primo elemento del crochet, ossia $T e^{-\beta t}$ è una distribuzione temperata, mentre il secondo, i.e. $e^{\beta t} \lambda(t) e^{-st}$, è una funzione a decrescenza rapida.

Proprietà: Se $f \in \Lambda$, allora la trasformata di Laplace di f (in senso classico) **coincide** con la trasformata di Laplace nel senso delle distribuzioni. In altre parole:

$$L_D[f] \equiv L[f].$$

Pertanto la definizione (2) assume significato quando, ferme restando le altre condizioni, T non sia una funzione di classe Λ . In particolare un semplice calcolo prova che:

$$\begin{aligned} L_D[\delta(t)] &= 1 \\ L_D[\delta'(t)] &= s \\ &\dots\dots\dots \\ L_D[\delta^{(n)}(t)] &= s^n \\ L_D[\delta(t-a)] &= e^{-as} \quad (a \geq 0) \end{aligned}$$

Per quanto concerne le funzioni razionali, il seguente risultato generalizza quello visto alcune lezioni fa'.

Teorema *Ogni funzione razionale*

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

è una trasformata di Laplace. Precisamente, se grado $N < \text{grado } D$, F è la trasformata di Laplace una funzione di classe Λ ; altrimenti, se grado $N \geq \text{grado } D$, F è la trasformata di Laplace di una distribuzione e non di una funzione di classe Λ .

Ad esempio la funzione

$$F_1(s) = \frac{s^3 + 8}{s^3 + 3s^2 + 1}$$

è la trasformata di una distribuzione, mentre

$$F_2(s) = \frac{s^2 + 8}{s^3 + 3s^2 + 1}$$

è la trasformata di una funzione di classe Λ .

Per la trasformata di Laplace "tradizionale" vale, come è noto, il seguente:

Teorema derivazione (in senso classico) *Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f, f' \in \Lambda$. Allora si ha*

$$L[f'] = sL[f] - f(0+) \quad (4)$$

Nell'ambito della trasformata di Laplace per le distribuzioni, si può provare il seguente:

Teorema derivazione (nel senso delle distribuzioni) *Sia $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $f' \in L_{loc}^1$ e siano $f(t)u(t) \in \Lambda$, $f'(t)u(t) \in \Lambda$. Allora*

$$L_D[Df] = sL[f] - f(0-) \quad (5)$$

Ovviamente (4) e (5) coincidono se f è nulla sul semiasse negativo, oppure se f è continua in $t = 0$. In generale, (4) e (5) sono però diverse e ciò dipende dal diverso significato di f' e Df .

4 La distribuzione v.p. (1/t)

Consideriamo il funzionale T definito da

$$T : \varphi \in D \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt \quad (6)$$

L'integrale in (6) è ben definito in quanto la funzione integranda è nulla per ogni t sufficientemente grande ($\varphi \in D$) ed inoltre

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} = 2\varphi'(0).$$

Si può provare che tale funzionale è lineare e continuo in D e quindi è una distribuzione. Tale distribuzione si indica con $v.p.1/t$, ossia

$$\left\langle v.p.\frac{1}{t}, \varphi(t) \right\rangle =_{\text{def}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt.$$

Il motivo del nome dato a questa distribuzione è giustificato dal fatto che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{t} \varphi(t) dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{t} \varphi(t) dt \right),$$

ossia

$$\left\langle v.p.\frac{1}{t}, \varphi(t) \right\rangle =_{\text{def}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{t} \varphi(t) dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{t} \varphi(t) dt \right)$$

dove ε è una costante positiva,

Proprietà:

- la derivata nel senso delle distribuzioni di $\log |t|$ è $v.p.\frac{1}{t}$, i.e.

$$D(\log |t|) = v.p.\frac{1}{t};$$

- Trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = -jv.p.\frac{1}{\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{sgn(t)\} = -2jv.p.\frac{1}{\omega},$$

dove $u(t)$ rappresenta la funzione scalino e $sgn(t)$ la funzione "segno", i.e.

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ -1 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$