

ANALISI MATEMATICA 3

A.A. 2007-2008

ESERCIZI - parte prima

January 25, 2008

1 Trasformata di Fourier

Notazione : indichiamo con $u(t)$ la funzione scalino, ossia

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 1.1 - Stabilire quali delle seguenti funzioni è trasformabile secondo Fourier in L^1 e/o in L^2 .

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^{-t}; & f_2(t) &= e^{-t}u(t); & f_3(t) &= e^t; & f_4(t) &= e^t u(t); \\ f_5(t) &= e^{-|t|}; & f_6(t) &= e^t[u(t) - u(t-7)]; & f_7(t) &= \frac{1}{t}u(t); \\ f_8(t) &= \frac{1}{t}u(t-5); & f_9(t) &= \frac{1}{t^2}u(t); & f_{10}(t) &= \frac{1}{t^2}u(t-6); \\ f_{11}(t) &= \frac{1}{t-4}u(t-4); & f_{12}(t) &= \frac{1}{t-4}u(t-7); \\ f_{13}(t) &= \frac{1}{(t-4)^3}u(t-7); & f_{14}(t) &= \frac{1}{\sqrt{t}}[u(t) - u(t-4)]; \\ f_{15}(t) &= \frac{1}{\sqrt{t}}u(t-4). \end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.2 - A quale delle funzioni di cui all'Esercizio 1.1 è applicabile il Teorema di Plancherel?

ESERCIZIO 1.3 - Si considerino le funzioni

$$\begin{aligned}g_1(t) &= 5t^2[u(t) - u(t - 9)] \\g_2(t) &= (\sin t)e^{-t^2} \\h_1(t) &= g_1(t - 4)e^{jt} \\h_2(t) &= g_2(t + \pi)e^{-3jt}.\end{aligned}$$

Tali funzioni ammettono trasformata di Fourier in L^1 ? E in L^2 ? In caso affermativo la trasformata di Fourier è continua? E' derivabile? Se sì, quante volte?

ESERCIZIO 1.4 - Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}f_1(t) &= \frac{1}{t^2 + 5t + 8}; \quad f_2(t) = \frac{t - 2}{t^2 + 5t + 8}; \\f_3(t) &= \frac{2}{3 + 2t^2}; \quad f_4(t) = \frac{t + 1}{2t^2 + 3}; \\f_5(s) &= \frac{t + 5}{t^2 + 2t + j}; \quad f_6(t) = \frac{5}{t^2 + 2jt + j}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.5 - Calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni

$$\begin{aligned}g_i(t) &= f_i(t)e^{5jt} \\h_i(t) &= f_i(t - 9)\end{aligned}$$

dove le funzioni f_i sono definite nell'Esercizio 1.4.

ESERCIZIO 1.5 - Calcolare l'antitrasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}F_1(\omega) &= \frac{2\omega}{\omega^2 + j}; \quad F_2(\omega) = \frac{2\omega}{\omega^2 - j}; \\F_3(\omega) &= \frac{2j}{\omega^2 + 4}; \quad F_4(\omega) = \frac{2\omega}{\omega^2 + \omega + 6}; \\F_5(\omega) &= \frac{1}{j\omega + 1}; \quad F_6(\omega) = \frac{\omega - 4}{(\omega - 4)^2 + 6}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.6 - Calcolare l'antitrasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$G_i(\omega) = F_i(\omega)e^{3j\omega},$$

dove le funzioni F_i sono definite nell'Esercizio 1.5.

ESERCIZIO 1.7 - Quali delle seguenti funzioni sono trasformate di Fourier in L^2 ?

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \frac{\omega + j}{\omega + 1}; & F_2(\omega) &= \frac{\omega + j}{\omega^2 + 1}; \\ F_3(\omega) &= \frac{\omega + j}{\omega^2 - 1}; & F_4(\omega) &= \frac{7\omega + 2}{\omega^2 + 9}; \\ F_5(\omega) &= \frac{\omega^2 + 7\omega + 2}{\omega^3 + 9}; & F_6(\omega) &= \frac{\omega^2 + 7\omega + 2}{\omega^4 + 9}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.8 - A quale delle seguenti funzioni è applicabile il Lemma di Jordan?

$$F_1(s) = \frac{5s^2 + 4}{s^2 + 16}; F_2(s) = \frac{5s^2 + 4}{s^2 + 16}e^{-s}; F_3(s) = \frac{5s + 4}{s^2 + 16}.$$

ESERCIZIO 1.9 - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, reale dispari e a supporto compatto. Sia F la sua trasformata di Fourier. Quanto vale $F(0)$?

ESERCIZIO 1.10 - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, e sia F la sua trasformata di Fourier. E' vera l'affermazione

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} F(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega F(\omega) ?$$

RISPOSTE:

Esercizio 1.1 : sono trasformabili in L^1 e in L^2 le funzioni $f_2, f_5, f_6, f_{10}, f_{13}$. Sono trasformabili in L^2 e non in L^1 le funzioni f_8, f_{12} . E' trasformabile in L^1 e non in L^2 la funzione f_{14} . Le altre funzioni non sono trasformabili né in L^1 né in L^2 .

Esercizio 1.2 : E' applicabile alle funzioni trasformabili in L^2 , ossia a $f_2, f_5, f_6, f_8, f_{10}, f_{12}, f_{13}$.

Esercizio 1.3 : tutte le funzioni considerate ammettono trasformata sia in L^1 che in L^2 . Poiché sono trasformabili in L^1 , le trasformate sono funzioni continue. Applicando la proprietà della "moltiplicazione per t " e i suoi corollari, si ha che tutte le trasformate sono di classe C^∞ .

Esercizio 1.7 : sono trasformate in L^2 le funzioni F_2 e F_4 . Non lo sono le altre.

ANALISI MATEMATICA 3

A.A. 2007-2008

ESERCIZI - parte SECONDA

February 8, 2008

1 Trasformata Laplace

Esercizio 1.1 Utilizzando la formula di Bromwich-Mellin e la teoria dei residui, calcolare le antitrasformate di Laplace delle seguenti funzioni razionali:

$$\begin{aligned}F_1(s) &= \frac{1}{s^2 + 4s + 5}; & F_2(s) &= \frac{1}{s^2 + 4s + 3}; \\F_3(s) &= \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s}; & F_4(s) &= \frac{s + 2}{(s + 1)(s - 2)(s^2 + 4)}; \\F_5(s) &= \frac{1}{(s - 1)^2(s + 2)}; & F_6(s) &= \frac{s^2 + 2s - 1}{s^3 - 2s^2 + 2s - 1}.\end{aligned}$$

Esercizio 1.2 Quale o quali delle seguenti funzioni è la trasformata di Laplace di una funzione di classe Λ ?

$$\begin{aligned}G_1(s) &= \frac{s^2 + 4}{s^2 - 4}; & G_2(s) &= \frac{s^2 + 4}{s^2 - 4s}; & G_3(s) &= \frac{s + 4}{s^2 - 4}; \\G_4(s) &= \frac{s^2 + 4}{s^3 - 4}; & G_5(s) &= \frac{s^3 + 4s}{s^2 - 4}; & G_6(s) &= \frac{s^4 + 4}{s^2 - 4s}; \\G_7(s) &= \frac{s}{s^4 - 4}; & G_8(s) &= \frac{4}{s^2 - 4}; & G_9(s) &= \frac{s^4 + 4s^2}{s^3 - 4}.\end{aligned}$$

Esercizio 1.3 - Si considerino le seguenti funzioni. Quale o quali è di classe Λ ? (Si assuma che tali funzioni sono nulle per $t < 0$)

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^{-t^2}; & f_2(t) &= t^7 + 14t^6; \\ f_3(t) &= t \cos t; & f_4(t) &= e^t \cos t^2; \\ f_5(t) &= e^{t^2} \cos t; & f_6(t) &= t^{-4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \begin{cases} 21 & \text{se } t > 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}; \\ g_2(t) &= \begin{cases} e^t \sin t & \text{se } t > 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}; \\ g_3(t) &= \begin{cases} t^{-4} & \text{se } t > 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}. \end{aligned}$$

Esercizio 1.4 - A quale o quali delle seguenti funzioni è applicabile il Lemma di Jordan?

$$f_1(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 2}; f_2(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 2}; f_3(s) = \frac{1}{|s|}; f_4(s) = e^{-s}.$$

Soluzioni Esercizio 1.1 Per $t > 0$ si ha:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^{-2t} \sin t \\ f_2(t) &= \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t}) \\ f_3(t) &= 1 - e^{-t} - te^{-t} \\ f_4(t) &= \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{10} \cos 2t - \frac{1}{5} \sin 2t \\ f_5(t) &= \frac{1}{9}(e^{-2t} - e^t + 3te^t) \\ f_6(t) &= 2e^t + e^{t/2} \left(\frac{5\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t - \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right). \end{aligned}$$

(Tali funzioni sono inoltre nulle per $t < 0$).

2 Funzioni di Bessel

Esercizio 2.1 Siano J_3 e J_8 due funzioni di Bessel. Calcolare l'espressione

$$J_3(5) + J_{-3}(5) + J_8(1) - J_{-8}(1).$$

Esercizio 2.2 Calcolare

$$3\Gamma(4/3) - \Gamma(1/3) + \Gamma(1),$$

dove Γ è la funzione gamma euleriana.

Esercizio 2.3 Si consideri la funzione Γ euleriana. Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + 1 &= 2\Gamma(1) \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + 2\Gamma(2) &= 1 \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \Gamma(3) &= 2\Gamma(1)\end{aligned}$$

Esercizio 2.4 Siano J_n e Y_n le funzioni di Bessel di prima e seconda specie. Si stabilisca se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta o errata.

- i) - la funzione Y_n è oscillante;
- ii) - Per ogni n intero positivo $\exists M_n > 0$ tale che $Y_n(x) > M_n$ se x è sufficientemente grande;
- iii) - Sia n non intero. le tre funzioni J_n, J_{-n}, Y_n sono linearmente indipendenti.

3 Oscillazione

Esercizio 3.1 Stabilire quale delle seguenti equazioni è oscillante e quale nonoscillante

- 1) $y'' - 7y' + (x^2 - 1)e^{7x}y = 0$
- 2) $y'' + 7xy' + (1 - x^2)y = 0$
- 3) $y'' + \frac{1}{x}y' + 4y = 0$
- 4) $y'' + 5xy' - 4xy = 0$
- 5) $y'' + \frac{3-x}{x+3}y = 0$
- 6) $y'' + \frac{x^3 - 3x - 1}{x(x^2 + 9)}y = 0$

Risposta: sono oscillanti le equazioni 1), 3) e 6); nonoscillanti le altre.

ANALISI MATEMATICA 3

A.A. 2007-2008

ESERCIZI - parte TERZA

February 22, 2008

NOTA:

Lo svolgimento dei seguenti Esercizi e' raccomandato come preparazione al secondo test, che si svolgera' al termine del corso.

1 Funzioni di Bessel -Formule ricorrenza

Esercizio 1.1 Siano J_n le funzioni di Bessel. Stabilire quale delle seguenti uguaglianze è corretta

$$2J_3'(2) - 3J_{-3}(2) = 3J_2(2)$$

$$2J_3'(2) - 3J_{-3}(2) = 2J_2(2)$$

$$2J_3'(2) - 3J_{-3}(2) = 2J_3(2)$$

2 Distribuzioni - Generalità

Sia u la funzione

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

ESERCIZIO 2.1 - Calcolare la derivata, nel senso delle distribuzioni, di:

$$\begin{array}{lll} 3e^{5t}\delta(t-1); & u(t) - u(t-8); & 3e^{5t} + e^{-4t}\delta(t); \\ (t^2 + 2t - 6)\delta(t); & u(t) + 5t\delta(t); & (t^2 + 2t)\delta(t+1); \\ \sin t + \delta(t); & (\sin t)\delta(t-5); & (\sin t)\delta(t). \end{array}$$

ESERCIZIO 2.2 - Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$$\begin{array}{l} \sin(2t) \cdot \delta'(t) = 0 \\ \sin(2t) \cdot \delta'(t) = -2\delta(t) \\ \sin(2t) \cdot \delta'(t) = \delta'(t) \\ \sin(2t) \cdot \delta'(t) = u(t) + 2\delta(t). \end{array}$$

ESERCIZIO 2.3 - Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$$\begin{array}{l} 5t\delta'(t) + \delta(t) = \delta'(t) \\ 5t\delta'(t) + \delta(t) = -4\delta(t) \\ 5t\delta'(t) + \delta(t) = \delta'(t) + 5u(t). \end{array}$$

ESERCIZIO 2.4 - Date le funzioni

$$f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{se } t \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in (1, 2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

calcolare Df , Dg , $D[e^t f(t)]$, $D[e^{-t} g(t)]$, $e^t Df$, $e^{-t} Dg$ [Il simbolo D indica la derivata nel senso delle distribuzioni].

ESERCIZIO 2.5 - Quali tra le seguenti sono distribuzioni? In caso affermativo calcolarle.

$$\begin{array}{lll} T_1 = e^{5t}\delta'(t+1); & T_2 = u(t)\delta(t); & T_3 = t^{-4}\delta(t-4); \\ T_4 = t^2 u(t)\delta(t); & T_5 = t^2[\delta(t-1) - \delta'(t)]; & T_6 = |t|(t^2 + 2)\delta(t+2); \\ T_7 = (\sin t)\delta(t-4); & T_8 = (\sin t^2)\delta(t+1); & T_9 = (\sin t)u(t)\delta(t-3). \end{array}$$

3 Trasf. Fourier di Distribuzioni

ESERCIZIO 3.1 - Quale delle seguenti distribuzioni è una distribuzione temperata?

$$\begin{array}{lll} 2t + \sin 5t; & t\delta(t) + t\delta(t-1); & t + e^t; \\ t + e^t\delta(t); & e^{-t}\delta(t-1); & e^{-t} + \delta(t); \\ \cos t + \delta(t+4); & 1 + \cos 2t; & e^{-t} + \sin t; \\ (1 + \sin 3t)\delta(t-2); & 1 + 7t^2; & (1 + 7t^2)\delta(t). \end{array}$$

ESERCIZIO 3.2 - Calcolare la trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni) delle distribuzioni di cui all'Esercizio 3.1 che sono temperate.

Calcolare poi la trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni) della derivata (nel senso delle distribuzioni).

ESERCIZIO 3.3 - Data la funzione

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{se } t \in (0, 4) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si calcoli la trasformata di Fourier di Df , di tDf , di $(t-4)Df$.

ESERCIZIO 3.4 - Quale delle seguenti è una distribuzione?

$$\begin{array}{lll} (t+6)\delta(t); & e^t + e^{-t}\delta(t); & (\log t)\delta'(t); \\ \delta^2(t); & (t-4)^{-2}\delta(t+2); & (\sin 5t)\delta(t); \\ (\sin 5t)\delta'(t); & e^{-5t} - 5; & (e^{5t} + 5)\delta(t). \end{array}$$

Quale delle precedenti è una distribuzione temperata? Per quelle che lo sono si calcoli la trasformata di Fourier e la trasformata di Fourier della derivata (nel senso delle distribuzioni).

4 Trasf. Laplace di distribuzioni

Esercizio 4.1 Calcolare le antitrasformate di Laplace (nel senso delle distribuzioni) delle seguenti funzioni razionali:

$$F_1(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 4s + 5}; \quad F_2(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 5s + 6};$$
$$F_3(s) = \frac{s^3 - 1}{s^3 + 7s^2 + 6s}; \quad F_4(s) = \frac{s(s + 2)^2}{(s + 1)(s - 2)}.$$

Esercizio 4.2 Date le distribuzioni

$$T_1 = e^t \delta(t); \quad T_2 = e^{-t} \delta'(t - 1); \quad T_3 = (t - e^t) \delta(t);$$

$$T_4 = (t - e^t) \delta(t - 1); \quad T_5 = (t - e^t) \delta'(t); \quad T_6 = \delta(t - 1) + \delta'(t - 2),$$

calcolarne la derivata DT (nel senso delle distribuzioni). Calcolare poi la trasformata di Fourier e la trasformata di Laplace di DT .