ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2007-2008
Traccia delle lezioni del 23 e 24 gennaio 2008

January 24, 2008

1 Spazi normati

Sia V uno spazio vettoriale complesso. Si chiama *norma in* V ogni applicazione $||\cdot||$

$$||\cdot|| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

$$\begin{array}{ll} ||f|| \geq 0, = 0 \text{ se e solo se } f = \underline{0} & \forall f \in V, \\ ||\alpha f|| = |\alpha| \; ||f|| & \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f \in V \\ ||f+g|| \leq ||f|| + ||g|| & \forall f, g \in V \end{array}$$

e lo spazio V si chiama *spazio normato.*

Ad esempio, se V è lo spazio delle funzioni continue in $[0,1]$, ossia $V = C[0,1]$, allora è immediato verificare che sono norme in $C[0,1]$ le seguenti ($f \in C[0,1]$):

$$||f||_M = \max_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

$$||f||_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

- **Ogni spazio normato V è anche uno spazio metrico, con distanza d data da**

$$d(f,g) = ||f-g|| \qquad\qquad (f,g \in V)$$

In riferimento all'esempio di sopra, allora in $C[0,1]$ è possibile considerare le tre distanze (metriche) $(f,g \in C[0,1])$:

$$\begin{aligned} d_M(f,g) &= ||f-g||_M = \max_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)| \\ d_1(f,g) &= ||f-g||_1 = \int_0^1 |f(t)-g(t)|dt \\ d_2(f,g) &= ||f-g||_2 = \left(\int_0^1 |f(t)-g(t)|^2 dt\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Esercizio. Sia $f(t) = t(1-t), g(t) = t/2$. Si verifichi che

$$d_M(f,g) = 1/2, \qquad d_1(f,g) = 1/8.$$

2 Richiami sul concetto di integrale improprio

Sia f una funzione reale di variabile reale, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile in ogni intervallo limitato e chiuso dell'asse reale. Se, **comunque** siano scelti $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, esiste finito il limite

$$\lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

e tale limite è indipendente da a, b, allora si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =_{def} \lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

e diremo che f è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, o, equivalentemente che l'integrale di f, esteso a $\mathbb{R}$, converge. In caso contrario diremo che f non è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ o semplicemente che f non è integrabile in $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, che l'integrale di f, esteso a $\mathbb{R}$ non converge.

Si chiama poi *valore principale dell'integrale improprio* (in $\mathbb{R}$) e si indica con

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

il limite

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =_{def} \lim_{L \to +\infty} \int_{-L}^{+L} f(x)dx. \tag{2}$$

La relazione tra le due definizioni (1), (2) è, ovviamente, la seguente: se f è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ allora il valore principale dell'integrale improprio esiste finito e coincide con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, ossia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \implies v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M.$$

Ovviamente NON vale il viceversa, ossia il valore principale dell'integrale improprio può essere finito, ma l'integrale (1) può non convergere, i.e.

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \;\not\Rightarrow\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M\ .$$

Ad esempio per la funzione

$$f(x) = \frac{x^5}{x^4+1}$$

si ha

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^5}{x^4+1} dx = 0$$

in quanto la funzione è dispari, ma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ovviamente non converge (f è illimitata!).

3 Gli spazi $\mathbf{L}^p$

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile reale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e sia p un numero reale $p \geq 1$.

Scriveremo $f \in L^p(\mathbb{R})$ se $| \ f \ |^p$ è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ ossia se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt < \infty.$$

In particolare se $p = 1, f$ si dice *sommabile* e in tal caso scriveremo $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Se $p = 2$, f si dice *a quadrato sommabile* e scriveremo $f \in L^2(\mathbb{R})$

Gli spazi $L^p(\mathbb{R})$ sono spazi normati (e quindi anche metrici).

In particolare la norma e la distanza in $L^1(\mathbb{R})$ sono date, rispettivamente, da $(f, g \in L^1(\mathbb{R}))$

$$||f||_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$
$$d_{L^1}(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)| dt$$

Per quanto riguarda $L^2(\mathbb{R})$, la norma e la distanza sono date da $(f, g \in L^2(\mathbb{R}))$

$$||f||_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$
$$d_{L^2}(f,g) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Esistono funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R})$, ma non a $L^1(\mathbb{R})$ e viceversa. Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t^{-1} & \text{se } t \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $f \notin L^1(\mathbb{R})$. Invece per la funzione

$$g(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $g \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \notin L^2(\mathbb{R})$. Chiaramente poi esistono funzioni appartenenti sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$: ad esempio la funzione

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$ ossia $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

4 Trasformata di Fourier in $\mathbf{L}^1$

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile **reale** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sommabile, ossia $f \in L^1(\mathbb{R})$, i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty;$$

ciò posto, si chiama *Trasformata di Fourier (in L^1)* di f la funzione F definita da

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \tag{3}$$

dove ω è un numero reale fissato.

- La definizione (3) è lecita, nel senso che l'integrale in (3) converge per ogni ω reale.

- Utilizzando le formule di Eulero si ha:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t \ dt}_{(*)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t \ dt}_{(+)}$$

  $(*)$ si chiama *Trasformata coseno di Fourier* e $(+)$ *Trasformata seno di Fourier.*

- Formula della antitrasformata : vale il seguente teorema

Teorema *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si supponga inoltre che f sia sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo chiuso $[-L, L]$, qualunque sia L. Ciò premesso si ha*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{4}$$

La formula (4) è detta formula dell'antitrasformata di Fourier.

Si osservi che (3) è una definizione e vale sotto la sola condizione $f \in L^1(\mathbb{R})$. La formula dell'antitrasformata (4) è invece conseguenza di un Teorema e richiede una condizione aggiuntiva, ossia che f sia sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo chiuso $[-L, L]$, qualunque sia L.

5 Prime proprietà della trasformata di Fourier in $\mathbf{L}^1$

Indichiamo con $\mathfrak{F}$ l'operatore che associa a $f(\in L^1(\mathbb{R}))$ la sua trasformata di Fourier F, ossia $\mathfrak{F}\{f\} = F$. Ciò premesso si ha:

Teorema. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; allora la sua trasformata F è una funzione continua e infinitesima per $|\omega| \to \infty$.*

Corollario. *La trasformata di Fourier F di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ è una funzione limitata per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.*

Ad esempio non sono trasf. di Fourier (di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})!$) le funzioni

$$F_1(\omega) = \frac{\omega^2 + 12}{\omega^2 + 4}; F_2(\omega) = \frac{\omega + 12}{\omega^2 - 4}.$$

La trasformata di Fourier F di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$ puo' non essere derivabile. Esempi in tal senso saranno visti nelle prossime lezioni. Se, all'ipotesi $f \in L^1(\mathbb{R})$ aggiungiamo anche $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$ allora la risposta è affermativa, come segue subito dal seguente risultato.

Teorema *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$; allora la trasformata di Fourier F di f è di classe C^1 e si ha:*

$$\mathfrak{F}\{tf(t)\} = j\frac{d}{d\omega}F(\omega).$$

Si osservi che le due ipotesi "$f \in L^1(\mathbb{R})$" *e* "$tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$" sono tra loro indipendenti. Infatti, ad esempio, per la funzione f, data da

$$f(t) = \begin{cases} 1/t^2 & \text{se } t > 1 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha $f \in L^1(\mathbb{R})$" *e* "$tf(t) \notin L^1(\mathbb{R})$, mentre per la funzione g, data da

$$g(t) = \begin{cases} 1/t & \text{se } t \in (0,1) \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha "$g \notin L^1(\mathbb{R})$" *e* "$tg(t) \in L^1(\mathbb{R})$" .

Si osservi inoltre che tale teorema fornisce solo una condizione sufficiente, come illustra l'esempio della trasformata dell'impulso esponenziale (vedi dopo).

Dal teorema precedente seguono po i seguenti:

Corollario 1 *Sia* $t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ *per* $n = 0, 1, ..., N$. *Allora la trasformata di Fourier* F *di* f *è una funzione di classe* $C^N(\mathbb{R})$.

Corollario 2 *Sia* f *a supporto compatto, i.e. esiste un intervallo compatto* $[a, b]$ *tale che* $f(t) = 0$ *se* $t \notin [a, b]$. *Sia* f *assolutamente integrabile in* $[a, b]$. *Allora* f *è trasformabile secondo Fourier e la sua trasformata* F *è una funzione di classe* $C^\infty(\mathbb{R})$.

▲ **Impulso esponenziale** - Sia

$$f(t) = \exp(-|t|);$$

ovviamente $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si ha (con facili calcoli)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Pertanto la trasformata di Fourier di f è la funzione

$$F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2007-2008
Traccia della lezione del 25 gennaio 2008

January 25, 2008

1 ESEMPI

▲ **Impulso Rettangolare** - Sia

$$f(t) = \begin{cases} M \text{ se } |t| \leq L \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases};$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F(\omega) = 2ML\text{sink}(\omega L) = \begin{cases} 2M\omega^{-1}\sin(\omega L) & \text{se } \omega \neq 0 \\ \\ 2ML & \text{se } \omega = 0 \end{cases}.$$

▲ **Impulso Triangolare** - Sia

$$f(t) = \begin{cases} M(t+1) & \text{se } -1 \leq t < 0 \\ M(1-t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F(\omega) = \frac{2M(1-\cos\omega)}{\omega^2} \text{per } \omega \neq 0, F(0) = M.$$

ossia

$$F(\omega) = M\left(\text{sink}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2$$

▲ **Impulso esponenziale** - Sia

$$f(t) = \exp(-|t|);$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

▲ **Impulso gaussiano** - Sia

$$f(t) = \exp(-t^2/2);$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F(\omega) = \sqrt{2\pi}\exp((-\omega^2/2).$$

2 Trasformata di Fourier in L^2

2.1 Il Teorema di Plancherel

Vale il seguente:

Teorema di Plancherel - *Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$, Allora:*
1) L'integrale (nel senso del valore principale)

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

esiste per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, eccetto, al più, un insieme di misura nulla.
Posto allora

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

si ha inoltre:
2) $F \in L^2(\mathbb{R})$
3) Vale la formula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

4) Vale l'identità:

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

COMMENTI : la proprietà 4) è detta anche principio di conservazione della norma (o dell'energia).

La proprietà 1) suggerisce poi la seguente definizione.

DEFINIZIONE - Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$;si chiama *Trasformata di Fourier in* L^2, la funzione F definita da

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \tag{1}$$

OSSERVAZIONE : se inoltre $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora l'integrale in (1) coincide con l'integrale improprio, ossia la trasformata di Fourier in L^2 **coincide** con la trasformata di Fourier in L^1,vista in precedenza. La definizione precedente è pertanto un'estensione del concetto di trasformata di Fourier e, ovviamente, assume rilevanza per quelle funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R})$ e non a $L^1(\mathbb{R})$, ossia per quelle funzioni per le quali la trasformata considerata nella precedente lezione non è definita.

Ciò posto, la proprietà 3) del teorema di Plancherel diviene la formula dell'antitrasformata, formula che, a differenza di quanto accade in L^1, vale sotto le stesse ipotesi che assicurano l'esistenza della trasformata.

2.2 Proprietà di simmetria

Dal teorema di Plancherel segue l'importante proprietà della trasformata in L^2 :

Teorema (Proprietà di simmetria) *Sia* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *e sia* $\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega)$ *la sua trasformata. Allora* $F \in L^2(\mathbb{R})$ *e*

$$\mathfrak{F}\{\mathfrak{F}\{f\}\} = 2\pi f(-\omega).$$

In particolare, se f *è inoltre pari, allora la trasformata della trasformata di Fourier di* f *coincide con* f*, a meno di un fattore* 2π*.*

Conseguenze:

♦ Poiché la trasformata dell'impulso rettangolare

$$f(t) = \begin{cases} M \text{ se } |t| \leq L \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases};$$

è la funzione

$$F(\omega) = 2ML\text{sink}(\omega L),$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$g(t) = 2ML\text{sink}(Lt)$$

è

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = G(\omega) = \begin{cases} 2\pi M \text{ se } |\omega| \leq L \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}.$$

Si osservi che tale trasformata non è continua in $\mathbb{R}$.Infatti $g \notin L^1(\mathbb{R})$!

♦ Poiché la trasformata dell'impulso esponenziale

$$f(t) = \exp(-|t|);$$

è la funzione

$$F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2},$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$g(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

è

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = G(\omega) = 2\pi \exp(-|\omega|).$$

Si osservi che tale trasformata non è derivabile (in $\omega = 0$).

3 Derivazione

Teorema (Derivazione) *Sia* $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R}), f\,' \in L^1(\mathbb{R})$. *Allora*

$$\mathfrak{F}\{f\,'\} = j\omega\mathfrak{F}\{f\}.$$

Corollario *Sia* $f \in C^N(\mathbb{R})$ *e* $f \in L^1(\mathbb{R}), f\,' \in L^1(\mathbb{R}), ...f^{\,(N)} \in L^1(\mathbb{R})$. *Allora*

$$\mathfrak{F}\left\{f^{\,(N)}\right\} = (j\omega)^N \mathfrak{F}\left\{f\right\}.$$

In particolare, se $f \in C^2(\mathbb{R})$ *e* $f \in L^1(\mathbb{R}), f\,' \in L^1(\mathbb{R}), f\,'' \in L^1(\mathbb{R})$. *allora*

$$\mathfrak{F}\left\{f\,''\right\} = -\omega^2 \mathfrak{F}\left\{f\right\}.$$

Si osservi che l'ipotesi "$f \in C^1(\mathbb{R})$" nel precedente Teorema non può essere tralasciata, come mette in luce l'esempio dell'impulso rettangolare.

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2007-2008
Traccia della lezione del 30 gennaio 2008

January 31, 2008

1 Integrabilità della trasformata

Ricordiamo il Teorema della derivazione e le sue conseguenze, viste la lezione scorsa:

Teorema (Derivazione) *Sia* $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R}), f\,' \in L^1(\mathbb{R})$. *Allora*

$$\mathfrak{F}\left\{f\,'\right\} = j\omega\mathfrak{F}\left\{f\right\}.$$

Corollario *Sia* $f \in C^N(\mathbb{R})$ *e* $f \in L^1(\mathbb{R}), f\,' \in L^1(\mathbb{R}), ...f\,^{(N)} \in L^1(\mathbb{R})$. *Allora*

$$\mathfrak{F}\left\{f\,^{(N)}\right\} = (j\omega)^N\mathfrak{F}\left\{f\right\}.$$

Ricordiamo pure la formula dell'antitrasformata:

Teorema *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *e si supponga inoltre che* f *sia sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso* $[-L, L]$. *Ciò premesso si ha*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{1}$$

Se $F \in L^1(\mathbb{R})$, allora l'integrale in (1) converge non solo nel senso del valore principale, ma anche in senso generalizzato (o improprio). In altre parole, se $F \in L^1(\mathbb{R})$ la formula dell'antitrasformata diviene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{2}$$

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ puo' accadere che la sua trasformata $F = \mathfrak{F}\{f\}$ non appartenga a $L^1(\mathbb{R})$, come illustra, ad esempio il caso dell'impulso rettangolare. Pertanto, come si dice, lo spazio L^1 non è chiuso rispetto all'operatore "trasformata di Fourier".

Condizioni sufficienti affinchè la trasformata appartenga a $L^1(\mathbb{R})$ si ottengono come immediata conseguenza del teorema della derivazione. Si hanno infatti i seguenti:

Corollario 1 *Sia* $f \in C^n(\mathbb{R}), f.\ f', ..., f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ *allora* $F = o(\omega^{-n})$ *per* $|\omega| \to \infty$, *ossia*

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \frac{F(\omega)}{\omega^{-n}} = 0$$

dove $F = \mathfrak{F}\{f\}$.

Il significato di tale Corollario è il seguente: *"la trasformata di Fourier* F *di una funzione* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *tende a zero (per* $|\omega| \to +\infty$*) tanto più velocemente, quanto più* f *è "liscia" (e con derivate in* $L^1(\mathbb{R})$*)"*

Corollario 2 *Sia* $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f.\ f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$; *allora* $F \in L^1(\mathbb{R})$ *(e quindi nella formula della antitrasformata si può omettere la sigla v.p.,in quanto, in tal caso, (1) e (2) coincidono.*

2 Il Teorema del campionamento

Un'importante applicazione della trasformata di Fourier nell'ambito della trasmissione di segnali è data dal Teorema di Shannon (o del campionamento) : si veda Cap. 3.14 in M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

3 Altre proprietà

1. **Integrazione -** Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dove $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, si ha

$$\mathfrak{F}\{g\} = \frac{F(\omega)}{j\omega}.$$

Poiché la trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$ è una funzione continua per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, dalla proprietà precedente si ha anche il

Corollario *Siano* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, *dove* $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$. *Posto* $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, *si ha*

$$\lim_{\omega \to 0} F(\omega) = 0.$$

2. **Convoluzione -** Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Si chiama prodotto di convoluzione di f e g, e si indica con $f * g$, la funzione

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Tale definizione è lecita, nel senso che è possibile provare che

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Teorema - *Siano* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. *Posto* $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}, G(\omega) = \mathfrak{F}\{g\}$, *si ha*

$$\mathfrak{F}\{f * g\} = F(\omega)G(\omega).$$

Se **inoltre** f, g sono nulle sul semiasse negativo, ossia se per $t < 0$ si ha

$$f(t) = g(t) = 0,$$

allora è immediato verificare che (per $t > 0$)

$$(f * g)(t) = \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{3}$$

Il prodotto di convoluzione interviene nella risolubilità di equazioni (o sistemi) differenziali lineari a coefficienti costanti. A titolo di esempio, per l'equazione lineare scalare

$$y' = cy + b(t), \tag{4}$$

dove c è una costante reale e b una funzione continua (a tratti) in $[0, \infty)$ si ha

$$y(t) = e^{ct}y(0) + e^{ct} * b(t). \tag{5}$$

Si osservi che la funzione e^{ct} è una soluzione dell'equazione lineare omogenea

$$x'(t) = cx(t); \tag{6}$$

precisamente è la soluzione x di (6) tale che $x(0) = 1$. La formula (5) mette in luce che per la risolubilità di (4) è sufficiente allora determinare tale soluzione. Così, ad esempio, tutte le soluzioni di

$$y' + 7y = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

sono date da

$$y(t) = e^{-7t}y(0) + e^{-7t} * \frac{2t}{t^2 + 1}.$$

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2007-2008
Traccia della lezione del 31 gennaio 2008

January 31, 2008

In questa lezione vengono brevemente presentati alcuni richiami sull'analisi complessa, gia' visti nel Corso di Applicazioni di Matematica. Pertanto tale lezione e' dedicata in modo particolare agli studenti della laurea specialistica in Ingegneria Matematica.

1 Richiami sui numeri complessi

1.1 Forma algebrica.

Un numero complesso z in forma algebrica è un numero del tipo

$$z = a + jb$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e j, detta *unità immaginaria*, gode della proprietà

$$j^2 = -1.$$

I numeri a e b sono detti, rispettivamente, *parte reale* e *parte immaginaria* di z e si indicano con

$$a = \mathrm{Re}z, b = \mathrm{Im}z.$$

L'insieme dei numeri complessi si indica con il simbolo $\mathbb{C}$. Poiché ogni numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali, esso può essere rappresentato come punto del piano. Per tale motivo l'insieme $\mathbb{C}$ è chiamato anche piano complesso. I numeri z per cui $b = 0$ sono in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$ e l'insieme di tali punti è chiamato *asse reale.* Analogamente, i numeri z per cui $a = 0$ chiamati *immaginari (puri)* e l'insieme da essi formato è detto *asse immaginario.*

L'insieme $\mathbb{C}$ è non ordinato, in quanto si può dimostrare che non è possibile definire in $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine che sia compatibile con quella definita in $\mathbb{R}$.

Dato $z = a + jb \in \mathbb{C}$, si chiama *coniugato di* z, e si indica con $\overline{z}$, il numero

$$\bar{z} = a - jb;$$

quindi, se z è rappresentato nel piano dal punto A, il coniugato di z è rappresentato nel piano complesso $\mathbb{C}$ dal punto simmetrico di A rispetto all'asse reale. Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \overline{z \pm s} &= \overline{z} \pm \overline{s} \\ \overline{zs} &= \overline{z}\ \overline{s} \\ \overline{\left(\frac{z}{s}\right)} &= \frac{\overline{z}}{\overline{s}} \qquad \text{se } s \neq 0. \end{aligned}$$

Si chiama poi *modulo di* z, e si indica con $|z|$, il numero

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Valgono le seguenti relazioni tra $z, \bar{z}, |z|, \mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z$:

$$\begin{aligned} z\ \bar{z} &= |z|^2 \\ \mathrm{Re}z &= (z + \bar{z})/2 \\ \mathrm{Im}z &= (z - \bar{z})/2j. \end{aligned}$$

1.2 Operazioni algebriche

Le operazioni algebriche in $\mathbb{C}$ seguono le ordinarie regole del calcolo algebrico, con l'avvertenza che $j^2 = -1$. Pertanto, posto $z = a + jb, s = c + jd$, si ha

$$\begin{aligned} z + s &= (a + c) + (b + d)j \\ z - s &= (a - c) + (b - d)j \\ zs &= (ac - bd) + (bc + ad)j \\ \frac{z}{s} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} j \ (\text{se } s \neq 0). \end{aligned}$$

L'insieme $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, ossia ogni polinomio non costante ha almeno una radice in $\mathbb{C}$. Questa proprietà, nota sotto il nome di Teorema fondamentale dell'algebra o di D'Alembert, è una delle principali motivazioni dell'introduzione dell'insieme dei numeri complessi.

1.3 Distanza in $\mathbb{C}$

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico, dove la distanza $d(z,s)$ tra due numeri $z, s \in \mathbb{C}$ è data da

$$d(z,s) = |z-s|.$$

Verificare la relazione

$$|z+s|^2 + |z-s|^2 = 2(|z|^2 + |s|^2).$$

Tale relazione è nota come "Identità del parallelogrammo" in quanto esprime la ben nota proprietà della geometria euclidea che in un parallelogrammo la somma delle aree dei quadrati costruiti sulle diagonali coincide con la somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati.

Si chiama *intorno* di un punto z_0 in $\mathbb{C}$ di raggio δ l'insieme

$$I_\delta(z_0) = \{z : |z - z_0| < \delta\}.$$

Geometricamente $I_\delta(z_0)$ è l'interno di una circonferenza di centro z_0 e raggio δ.

Così, ad esempio,

$$|z - 3 + 2j| < 1$$

rappresenta l'interno di una circonferenza di centro $3-2j$ e raggio 1, mentre

$$|z + j| > 5$$

rappresenta l'esterno di una circonferenza di centro $-j$ e raggio 5.

1.4 Forma trigonometrica di un numero complesso.

Dato $z \neq 0, z \in \mathbb{C}$, si chiama *argomento di* z, e si indica con $\arg z$, l'angolo θ (con segno) che il raggio vettore forma con l'asse reale positivo. Se $z = a + jb$, indicando con ρ il modulo di z, risulta quindi:

$$z = a + jb = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$$

Le formule di passaggio sono quindi:

$$a = \rho \cos \theta$$
$$b = \rho \sin \theta$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\theta = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{se } a > 0, \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{se } a < 0, \\ \pi/2 & \text{se } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } a = 0, b < 0. \end{cases}$$

1.5 Formule di De Moivre.

Dati $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$, le formule di De Moivre danno una espressione particolarmente semplice del prodotto e del rapporto di tali due numeri ($s_1, s_2 \neq 0$). Esprimendo s_1 e s_2 in forma trigonometrica: $s_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)$, $s_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$, si ha

$$s_1 s_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$
$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

Tali formule possono essere iterate; in particolare possiamo ottenere l'espressione di una qualunque potenza di un dato numero complesso $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)], \qquad n \in \mathbb{N}.$$

A titolo di esercizio si verifichi che

$$\left(\sqrt{3} + j\right)^6 = -64.$$

Se interpretiamo i numeri complessi come vettori piani, allora la somma o la differenza tra due numeri complessi s, z. ha, rispettivamente, il significato tradizionale di somma o differenza tra vettori. Il prodotto di un numero complesso z per un numero complesso assegnato s_0, con $z \neq 0$ e $s_0 \neq 0$, puo' essere interpretato come una rotazione del vettore z accompagnata da una omotetia (dilatazione se $|s_0| > 1$, contrazione se $|s_0| < 1$). Ad esempio jz è il vettore che si ottiene ruotando in senso antiorario di $\pi/2$ il vettore z.

2 Funzioni complesse

2.1 Generalità

Posto $s = x + jy$ e $z = u + jv$ (dove x, y, u, v sono numeri reali e j indica l'unità immaginaria), sia $z = f(s)$ una funzione complessa. Tale funzione puo' essere interpretata come la trasformazione piana

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases},$$

dove $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$ prendono nome, rispettivamente, di *parte reale di* f e *parte immaginaria di* f.

Ad esempio la parte reale e la parte immaginaria della funzione

$$f(s) = \frac{1}{s}$$

sono date rispettivamente da

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

La funzione f prende nome di *"inversione per raggi reciproci"* e gode della seguente proprieta': f trasforma circonferenze di centro l'origine in circonferenze di centro l'origine e ne inverte il senso di percorrenza. Inoltre f trasforma l'interno di tali circonferenze nell'esterno e viceversa.

Ad esempio si calcoli la parte reale e la parte immaginaria delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} f_1(s) &= 7js + s^2 \\ f_2(s) &= s + |s|^2 \\ f_3(s) &= \frac{\overline{s}}{s-4} \\ f_4(s) &= \frac{3}{s - |s!} \end{aligned}$$

2.2 Limiti e continuità

Poiché $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico, la definizione di limite in $\mathbb{C}$ è simile a quella data in $\mathbb{R}$: è sufficiente interpretare il $|....|$ come modulo. Precisamente, data una funzione complessa $z = f(s)$ diremo che

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = L, \qquad (L \in \mathbb{C})$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|s - s_0| < \delta$ e $s \neq s_0$ si ha $|f(s) - L| < \varepsilon$.

E' facile provare che

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = L, \qquad (L \in \mathbb{C})$$

se e solo se

$$\lim_{s \to s_0} \operatorname{Re} f(s) = \operatorname{Re} L \qquad \text{e} \qquad \lim_{s \to s_0} \operatorname{Im} f(s) = \operatorname{Im} L.$$

La funzione complessa $z = f(s)$ si dice *continua in* s_0 se

$$\lim_{s \longrightarrow s_0} f(s) = f(s_0).$$

Una funzione f è continua in s_0 se e solo se sono continue in (x_0, y_0) [dove $s_0 = x_0 + jy_0$] la parte reale $u(x, y)$ e la parte immaginaria $v(x, y)$. Somma, differenza, prodotto e quoziente di due funzioni continue sono funzioni continue (nel caso del quoziente sono **esclusi** i punti in cui il denominatore si annulla).

Poichè $\mathbb{C}$ è non ordinato, non è possibile estendere al piano complesso il concetto di funzione monotona e le relative proprietà viste nell'ambito dell'analisi reale.

2.3 Successioni e serie

Anche per le successioni, la nozione di convergenza è quella usuale. Precisamente diremo che

$$\lim_n s_n = s_0 \tag{1}$$

o, equivalentemente,

$$s_n \to s_0$$

con $s_n, s_0 \in \mathbb{C}$ se $\forall \epsilon > 0$ esiste n_0 tale che $|s_n - s_0| < \epsilon \ \forall \ n \geq n_0$. E' facile mostrare che (1) è equivalente all'esistenza dei due limiti

$$\lim_n \operatorname{Re} s_n = \operatorname{Re} s_0, \qquad \lim_n \operatorname{Im} s_n = \operatorname{Im} s_0.$$

Poiche $\mathbb{C}$ è completo, ogni successione convergente in $\mathbb{C}$ è di Cauchy, ossia verifica

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n_0\ : |s_n - s_m| < \epsilon \qquad \forall n, m \geq n_0$$

e viceversa.

Analogamente al caso reale, diremo poi che la serie di numeri complessi

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_i$$

converge, se converge la successione $\{S_N\}$ delle somme parziali, dove

$$S_N = \sum_{i=0}^{N} s_i.$$

In particolare vale il seguente risultato "*Se la serie numerica* $\sum_{k=0}^{\infty} |s_k|$ *è convergente (in* $\mathbb{R}$*), allora la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} s_k$ *è convergente in* $\mathbb{C}$*".*

2.4 Esponenziale in $\mathbb{C}$

Si chiama *esponenziale complesso* la funzione

$$e^s =_{\text{def}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + ... + \frac{s^i}{i!} + ...$$

Tale definizione è l'estensione al campo complesso dell'esponenziale reale, è definita per ogni numero complesso s e gode delle seguenti proprietà:

1. $e^{s+z} = e^s e^z$; in particolare:

2. $e^{x+jy} = e^x e^{jy}$. Ricordando gli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni (reali) seno e coseno si ha:

3. $e^{jy} = \cos y + j \sin y, \qquad e^{-jy} = \cos y - j \sin y$ da cui, mediante somma e sottrazione, si ottengono le ben note *formule di Eulero* ($y \in \mathbb{R}$)

$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j};$$

4. indicando rispettivamente con ρ e θ il modulo e l'argomento di un numero complesso $s \neq 0$ si ha che tale numero può essere rappresentato (oltreché in forma algebrica e trigonometrica) mediante la *forma esponenziale:* $s = \rho e^{j\theta}$

5. $|e^s| = e^{\text{Re}s}$, $\text{Arg}(e^s) = \text{Im}(s)$, $\text{Re}\, e^s = e^{\text{Re}\, s} \cos \text{Im}\, s$, $\text{Im}\, e^s = e^{\text{Re}\, s} \sin \text{Im}\, s$

6. $e^s \neq 0$ per ogni $s \in \mathbb{C}$

7. $e^s = e^{s+2k\pi j}$, $k \in \mathbb{Z}$, i.e. e^s è una funzione periodica con periodo (complesso) $T = 2\pi j$.

3 Curva regolare in $\mathbb{C}$

Sia $[a, b]$ un intervallo **limitato e chiuso** della retta reale. Una *curva regolare* è una funzione $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = x(t) + jy(t)$$

dove le funzioni reali $x = x(t), y = y(t)$ sono funzioni derivabili con derivata continua nell'intervallo aperto (a, b) [i.e. $x, y \in C^1(a, b)$] e le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ non si annullano contemporaneamente in (a, b).

Tale concetto è del tutto analogo a quello visto nell'ambito dei corsi di Analisi Matematica, con la sola differenza che ora esso è formulato usando le notazioni complesse.

Se le due funzioni x, y sono di classe C^1 in tutto (a, b) eccetto un numero finito di punti e/o le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ si annullano contemporaneamente in un numero finito di punti, allora γ si dice *generalmente regolare*.

Geometricamente una curva regolare è rappresentata da una "linea" (detta *sostegno della curva*) avente tangente in ogni punto, salvo, al piu', gli estremi; una curva generalmente regolare è invece rappresentata da una "linea" che ammette tangente in ogni punto eccetto un numero finito di punti.

Esempio. La curva

$$\gamma(t) = \rho e^{jt} + s_0, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro s_0, raggio ρ e percorsa in senso antiorario. Infatti ponendo $\gamma(t) = x(t) + jy(t)$, $s_0 = x_0 + jy_0$ e utilizzando le formule di Eulero si ottiene

$$x(t) + jy(t) = \rho[\cos t + j \sin t] + x_0 + jy_0$$

da cui, uguagliando parte reale e parte immaginaria di ambo i membri, si ha

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho \cos t + x_0 \\ y(t) &= \rho \sin t + y_0 \end{aligned}$$

che, come è noto, è l'equazione in forma parametrica di una circonferenza di centro (x_0, y_0), raggio ρ e percorsa in senso antiorario (per $t \in [0, 2\pi]$).

Una curva γ si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva γ si dice *semplice* se presi $t_1, t_2 \in (a, b)$ con $t_1 \neq t_2$ risulta $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare; si chiama *lunghezza di* γ il numero reale

$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b |x'(t) + jy'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

4 Definizione di Integrale in $\mathbb{C}$

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare e sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione continua sulla curva. Si chiama *integrale di f esteso a γ* il numero complesso

$$\int_\gamma f(s)ds = \int_a^b f(\gamma(t))y'(t)dt.$$

Proprietà dell'integrale in C

1. **Linearità** (c_1, c_2 costanti complesse):

$$\int_\gamma [c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)]ds = c_1 \int_\gamma f_1(s)ds + c_2 \int_\gamma f_2(s)ds$$

2. **Ordine:**

$$\int_\gamma f(s)ds = -\int_{-\gamma} f(s)ds.$$

3. **Additività:**

$$\int_{\gamma 1+\gamma 2} f(s)ds = \int_{\gamma 1} f(s)ds + \int_{\gamma 2} f(s)ds$$

4. **Modulo dell'integrale:** vale la maggiorazione :

$$\left| \int_{\gamma} f(s)ds \right| \leq L_{\gamma} \max_{s \in \gamma} |f(s)|$$

dove L_{γ} indica la lunghezza della curva γ.

5 Teoremi di Cauchy per l'integrale

Teorema 1 (di Cauchy) *Sia γ una curva regolare (o generalmente regolare) semplice e chiusa e sia f una funzione analitica all'interno di γ e continua su γ. Allora:*

$$\int_{\gamma} f(s)ds = 0.$$

Tale Teorema esprime il fatto che in una regione in cui f è analitica, l'integrale è indipendente dal cammino.

Teorema 2 (1° Teorema dei Residui) *Sia Γ una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo. Sia H analitica all'interno di Γ eccetto un numero FINITO di punti $s_1, s_2, ..s_n$. Sia infine H continua su Γ. Allora*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} H(s)ds = Res[H, s_1] + Res[H, s_2] + ... + Res[H, s_n]$$

dove la scrittura $Res[H, s_i]$ indica il Residuo di H in s_i.

Il $Res[H, s_i]$ è stato definito nell'ambito del corso di Applicazioni di Matematica (o Complementi di Matematica) ai quali si rimanda. Qui ricordiamo soltanto le formule per il calcolo di tale Residuo nel caso in cui H sia una funzione del tipo

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{jms}$$

con N, D polinomi **primi tra loro** e m parametro reale.

- **Se s_0 è una radice semplice di D, allora**

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s \to s_0} (s - s_0) \frac{N(s)}{D(s)} e^{jms}.$$

- **Se s_0 è una radice doppia di D, allora**

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s \to s_0} \frac{d}{ds} \left[(s - s_0)^2 \frac{N(s)}{D(s)} e^{jms} \right].$$

- **In generale, se s_0 è una radice di ordine $n > 1$ di D, allora**

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s \to s_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left[(s - s_0)^n \frac{N(s)}{D(s)} e^{jms} \right].$$

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2007-2008
Traccia della lezione del 1 febbraio 2008

February 1, 2008

1 Calcolo della trasf. e antitrasf. di Fourier nel caso razionale

Vale il seguente:

Lemma di Jordan - *Sia* $g(s)$ *una funzione complessa, analitica per* $|s|$ *grande e tale che* $\lim_{s\to\infty} g(s) = 0$. *Allora:*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} g(s)e^{jms}ds = 0$$

se:

i) C_R *è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio* R, *contenuta nel semipiano* $\mathrm{Im}\ s > 0$ *e* m *è un numero reale positivo (vedi figura 1);*

oppure se:

ii) C_R *è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio* R, *contenuta nel semipiano* $\mathrm{Im}\ s < 0$ *e* m *è un numero reale negativo (vedi figura 2).*

Tale Lemma, insieme alla teoria dei Residui, consente di calcolare agevolmente integrali del tipo

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N(u)}{D(u)} e^{ju\omega} du$$

dove N e D sono polinomi con grado $D >$ grado N e $D(u) \neq 0$ per **ogni** u reale.

Premettiamo i seguenti:

Teorema 1 *Sia f una funzione razionale, ossia*

$$f(t) = \frac{N(t)}{D(t)}$$

con N, D polinomi primi tra loro. Allora $f \in L^2(\mathbb{R})$ (e quindi è trasformabile secondo Fourier in L^2) se e solo se f è propria e il polinomio D non ha zeri reali, ossia se e solo se

$$\begin{aligned} &i) \ \text{gr } N < \text{gr } D \\ &ii) \ D(t) \neq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

Se inoltre gr $D-$gr $N \geq 2$ allora f appartiene anche a L^1 (e quindi la sua trasformata di Fourier in L^1 coincide con quella in L^2).

Teorema 2 *Sia F una funzione razionale, ossia*

$$F(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$

con P, Q polinomi primi tra loro. Allora $F \in L^2$, ed è quindi è una trasformata di Fourier, se e solo se F è propria e il polinomio Q non ha zeri reali, ossia se e solo se

$$\begin{aligned} &i) \ \text{gr } P < \text{gr } Q \\ &ii) \ Q(\omega) \neq 0 \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

Inoltre, indicando con f la sua antitrasformata, si ha $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Utilizzando poi la teoria delle distribuzioni, vedremo alla conclusione del corso che il Teorema 2 puo' essere generalizzato nel modo seguente:

Teorema 3 *Sia F una funzione razionale, ossia*

$$F(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$

con P, Q polinomi primi tra loro e $Q(\omega) \neq 0$ $\forall \omega \in \mathbb{R}$. Allora:

- se gr $P <$ gr Q , allora F è trasformata di Fourier di una $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

- se gr $P \geq$ gr Q, allora F è trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni.

ESEMPIO 1

Si considerino le funzioni

$$f_1(t) = \frac{5+t}{t-8}; \quad f_2(t) = \frac{5+t}{t^2+8};$$
$$f_3(t) = \frac{5+t}{t-8}; \quad f_4(t) = \frac{5+t}{(t+8)^2}.$$

Allora f_1 e f_3 non sono trasfomabili secondo Fourier (né in L^1 né in L^2). Invece f_2 è trasformabile in L^2 e f_4 sia in L^2 che in L^1

ESEMPIO 2

Si considerino le funzioni

$$F_1(\omega) = \frac{5\omega}{\omega-8}; \quad F_2(\omega) = \frac{5\omega}{\omega^2+3\omega};$$
$$F_3(t) = \frac{5\omega}{\omega^2+3}; \quad F_4(\omega) = \frac{5\omega^2+4}{\omega^2+8}.$$

Allora F_1 e F_2 non sono trasformate di Fourier. Invece F_3 lo è e la sua antitrasformata appartiene a $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Infine F_4 è trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni.

Cio' premesso, utilizzando la teoria dei Residui e il Lemma di Jordan, si ottengono i due seguenti risultati, come è stato dettagliatamente illustrato a lezione.

Teorema (trasformata) - *Sia f razionale, $f(t) = N(t)/D(t)$. Siano i polinomi N, D primi tra loro e siano verificate le condizioni (1). Allora, indicati con $s_1, ...s_N$ gli zeri di D, si ha:*

$$\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega) = \begin{cases} 2\pi j \sum_{\text{Im } s_i>0} \text{Res}\,[f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega < 0 \\ -2\pi j \sum_{\text{Im } s_i<0} \text{Res}\,[f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega > 0 \end{cases}.$$

Tale Teorema si estende immediatamente al caso dell'antitrasformata (con alcune minori modifiche). Vale infatti il seguente:

Teorema (antitrasformata) - *Sia F razionale, $F(\omega) = P(\omega)/Q(\omega)$. Siano i polinomi P, Q primi tra loro e siano verificate le condizioni*

$$\begin{aligned} &i)\ \mathrm{gr}\ P < \mathrm{gr}\ Q \\ &ii)\ Q(\omega) \neq 0 \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Allora, indicati con $s_1, ...s_N$ gli zeri di Q, l'antitrasformata f di F è data da:

$$f(t) = \begin{cases} -j \sum_{\mathrm{Im}\ s_i < 0} \mathrm{Res}\ [F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t < 0 \\ \\ j \sum_{\mathrm{Im}\ s_i > 0} \mathrm{Res}\ [F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t > 0 \end{cases}.$$

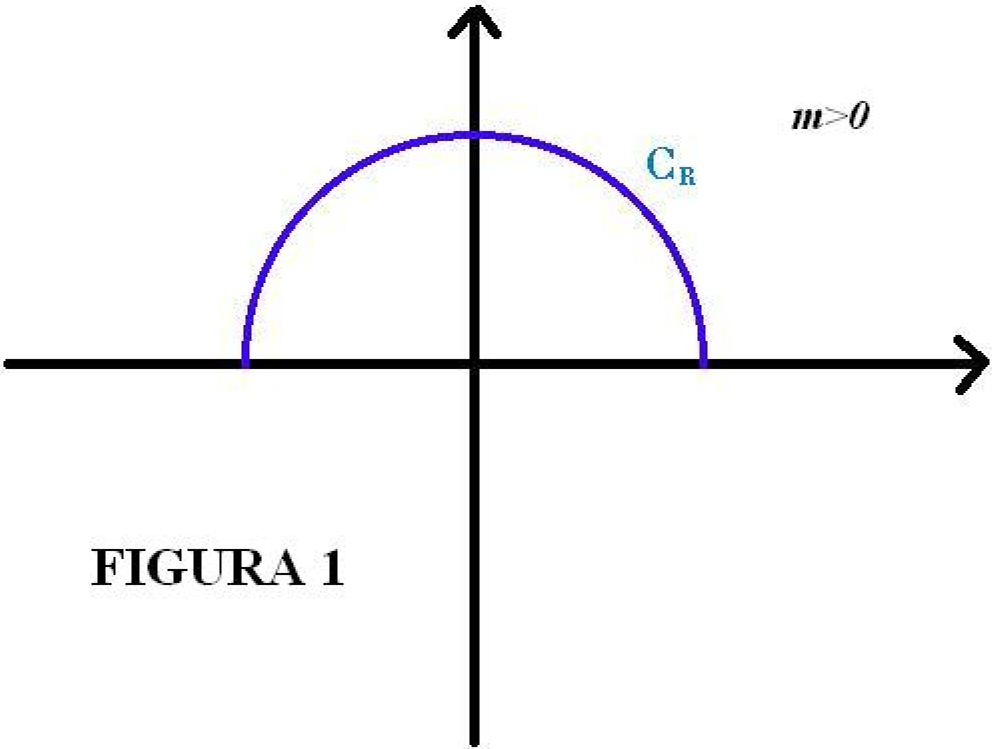

FIGURA 1

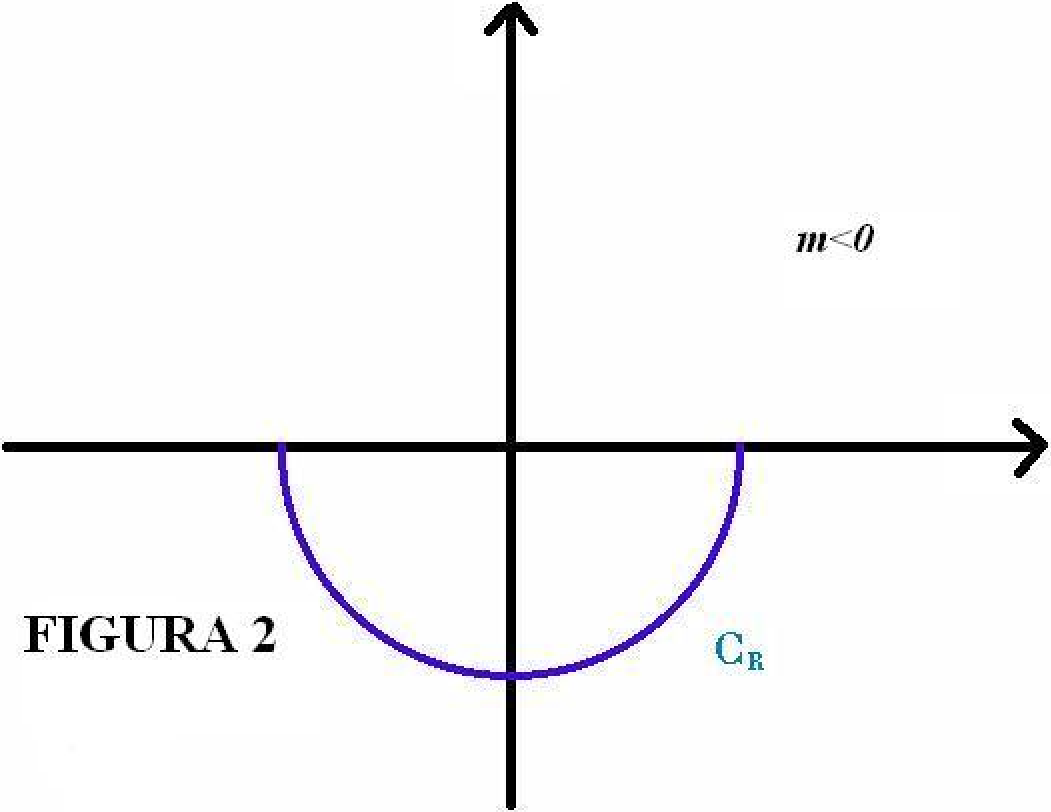

FIGURA 2

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2007-2008
Traccia delle lezioni del 6 e 7 febbraio 2008

February 6, 2008

1 Proprietà della trasformata F

Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ e sia F la sua trasformata di Fourier. Allora:

1. S*e f è pari, allora F è pari.*
2. S*e f è dispari; allora F è dispari.*
3. *Se f è reale, allora $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$.*
4. *Se f è reale e pari, allora F è reale e pari.*

Valgono anche le relazioni inverse se $f \in L^2(\mathbb{R})$ oppure se f è sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso $[-L, L]$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$. Precisamente:

5. S*e F è pari, allora f è pari.*
6. S*e F è dispari; allora f è dispari.*
7. *Se F è reale, allora $f(-t) = \overline{f(t)}$.*
8. *Se F è reale e pari, allora f è reale e pari.*

Esercizio:
Calcolare l'antitrasformata di Fourier di

$$F(\omega) = \frac{2j}{\omega^2 + 4}.$$

Poiché F è pari, anche la sua antitrasformata f è pari. Utilizzando il metodo visto la lezione scorsa si ha per $t > 0$

$$f(t) = j \ \mathrm{Res}[F(s)e^{jst}, 2j]$$

da cui, con facile calcolo,

$$f(t) = \frac{1}{2} j e^{-2t} \text{ se } t > 0$$

e quindi

$$f(t) = \frac{1}{2} j e^{2t} \text{ se } t < 0.$$

2 Altre proprietà della trasformata di Fourier

1. **Linearità** - *Siano* $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. *Allora:*

$$\mathfrak{F}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 \mathfrak{F}\{f_1\} + c_2 \mathfrak{F}\{f_2\}, \qquad c_i \in \mathbb{C}.$$

2. **Traslazione in frequenza -** *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$.*Allora:*

$$\mathfrak{F}\left\{f(t)e^{j\gamma t}\right\} = F(\omega - \gamma), \qquad \gamma \in \mathbb{R}.$$

3. **Traslazione temporale** - *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. *Allora:*

$$\mathfrak{F}\{f(t - A)\} = e^{-jA\omega} F(\omega), \qquad A \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO
Calcolare le trasformate di Fourier di

$$g(t) = \frac{1}{t^2 + 1} e^{5jt}; \quad h_1(t) = \frac{1}{(t + 8)^2 + 1};$$
$$h_2(t) = \frac{1}{(t + 8)^2 + 1} e^{4jt}.$$

Posto

$$f(t) = \frac{1}{t^2+1},$$

la sua trasformata di Fourier è (vedi lezione del 25 gennaio)

$$F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}.$$

Poiché $g(t) = f(t)e^{j5t}$, applicando la traslazione in frequenza si ottiene

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = F(\omega - 5).$$

Poiché $h_1(t) = f(t+8)$, applicando la traslazione temporale si ottiene

$$\mathfrak{F}\{h_1(t)\} = F(\omega)e^{8j\omega}.$$

Infine, avendosi $h_2(t) = h_1(t)e^{j4t}$, applcando la traslazione in frequenza alla trasformata di h_1 si ottiene

$$\mathfrak{F}\{h_2(t)\} = F(\omega - 4)e^{8j(\omega-4)}.$$

3 Trasformata di Laplace

Come si è visto, sono trasformabili secondo Fourier le funzioni appartenenti agli spazi $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$. Tali spazi tuttavia non sono sufficientementi "ampi" per poter applicare questo algoritmo alle soluzioni di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Ad esempio, come è noto, le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

sono una combinazione lineare delle funzioni

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^{5t}$$

e le due funzioni e^t, e^{5t} non appartegono né a $L^1(\mathbb{R})$, né a $L^2(\mathbb{R})$. Nasce quindi il problema di come sia possibile applicare l'algoritmo della trasformata a funzioni la cui crescita (per $t \to +\infty$) sia di tipo "esponenziale". La Trasformata di Laplace fornisce una risposta in tal senso. Alla fine del corso, vedremo un'altra possibilità di "estensione" della trasformata di Fourier, e quest'ultima estensione costituisce, come vedremo, un **effettivo** ampliamento degli spazi $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$.

3.1 Definizione

Introduzione, Preliminari, Funzioni di classe Λ, ascissa di convergenza: si veda Cap. 1.1, 1.2, 1.3 del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

Si ha poi il seguente:

Teorema. *Sia $f \in \Lambda$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza. Allora la funzione $f(t)e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $x > \alpha_f$.*

In virtù di tale teorema, possiamo porre allora la seguente

Definizione. *Sia $f \in \Lambda$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza. Si chiama* **trasformata di Laplace di** f, *e si indica con $L[f(t)]$, la trasformata di Fourier di $f(t)e^{-xt}$, con $x > \alpha_f$, ossia*

$$L[f(t)] = \mathfrak{F}\left\{f(t)e^{-xt}\right\}, \text{ dove } x > \alpha_f. \tag{1}$$

Ricordando la definizione di trasformata di Fourier, si ottiene allora la ben nota

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

dove s è un qualunque numero complesso con $\mathrm{Re}\, s = x > \alpha_f$.

3.2 Principali proprietà

Sia $f \in \Lambda$, α_f la sua ascissa di convergenza e $F(s) = L[f(t)]$ la sua trasformata di Laplace. Allora:

- F **è analitica per ogni** s **tale che** $\mathrm{Re}\, s > \alpha_f$.
- **Vale il seguente**
$$\lim_{\mathrm{Re}\, s \to +\infty} F(s) = 0.$$
- **linearita'.**
$$L[c_1 f(t) + c_2 g(t)] = c_1 L[f(t)] + c_2 L[g(t)]$$
  dove anche $g \in \Lambda$ e $c_i, i = 1, 2$, sono numeri complessi.

- **traslazione temporale.**

$$L[f(t-A)] = F(s)e^{-As}, \text{ con } A > 0;$$

- **traslazione in frequenza (o smorzamento).**

$$L[f(t)e^{\gamma t}] = F(s-\gamma), \text{ con } \gamma \in \mathbb{C}.$$

- **derivazione**. Sia $f \in C^1[0,+\infty), f, f' \in \Lambda$. Allora

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0+)$$

  dove $f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t)$.

- **convoluzione** Siano $f, g \in \Lambda$.Allora $f * g \in \Lambda$ e

$$L[f * g] = L[f]\ L[g].$$

  Si confrontino queste proprietà con le "corrispondenti" viste per la trasformata di Fourier, evidenziandone le analogie e differenze.

3.3 Applicazioni a equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

Si consideri, come esempio, l'equazione lineare a coefficienti costanti

$$y'' + ay' + by = f(t) \tag{2}$$

dove a, b sono numri reali e $f \in \Lambda$. Sotto tali ipotesi si può provare che tutte le soluzioni di (2) sono funzioni di classe Λ e pertanto, per la risolubilità di (2) è possibile applicare l'algoritmo della trasformata di Laplace. Per il procedimento e per il ruolo del prodotto di convoluzione si veda Cap. 1.14 del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

3.4 Formula di Bromwich-Mellin

Si veda Cap. 1.13.1, 1.13.2, del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

Formula di Bromwich-Mellin - *Sia $f \in \Lambda$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza. Sia inoltre f sviluppabile in serie di Fourier in $[0, L], \forall L > 0$. Indicata con $F(s) = L[f(t)]$ la sua trasformata di Laplace, si ha per $t > 0$*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} v.p. \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

dove $x > \alpha_f$.

Tale formula, nota anche sotto il nome di formula di Riemann-Fourier, puo' essere facilmente ottenuta dalla formula di inversione per la trasformata di Fourier e da (1).

Nel caso in cui F sia razionale, vale il seguente:

Teorema *Sia F razionale, $F(s) = N(s)/D(s)$. Allora esiste $f \in \Lambda$ tale che $F(s) = L[f(t)]$* **se e solo se** gr $D >$ gr N..

Come vedremo in seguito, se gr $D \leq$ gr N, allora F è la trasformata di Laplace di una distribuzione.

Utilizzando poi la teoria dei residui e il Lemma di Jordan, si puo' provare il seguente:

Teorema *Sia F razionale propria, $F(s) = N(s)/D(s)$ con N, D polinomi primi tra loro. Allora l'antitrasformata di Laplace di $F(s)$ è data, per $t > 0$, dalla funzione*

$$f(t) = \sum_{s_i} \mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_i],$$

dove s_i rappresentano gli zeri del polinomio D, i.e. le singolarità di F.

4 Equazioni differenziali lineari. Richiami e Esempi

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{3}$$

dove le funzioni a, b sono continue a tratti in un intervallo I dell'asse reale. Allora:

1. *Per ogni $x_0 \in I$ e per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione $y = y(x)$ di (3) tale che $y(x_0) = c_1$, $y'(x_0) = c_2$.*

2. *Ogni soluzione di (3) è persistente, ossia è definita in tutto l'intervallo I.*

3. *L'insieme delle soluzioni di (3) è uno spazio lineare di dimensione* 2 .

Esempi

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea (3), dove le funzioni a, b sono continue a tratti in un intervallo $I = (\overline{x}, +\infty)$ dell'asse reale (non è escluso il caso in cui I coincida con $\mathbb{R}$, ossia che $\overline{x} = -\infty$).

Se le funzioni a e b sono costanti, allora (*3*) diviene un'equazione "a coefficienti costanti" la cui risolubilità è stata trattata nei corsi di Analisi e può essere affrontata, come visto in precedenza, anche utilizzando la trasformata di Laplace. Esistono tuttavia nelle applicazioni vari casi in cui il modello matematico è rappresentato da un'equazione tipo (*3*) con a e/o b non a coefficienti costanti. Un primo esempio è l'equazione di Scrödinger monodimensionale

$$w'' + \frac{2m}{H^2}(E - V(x))w = 0 \tag{4}$$

dove :

m rappresenta la massa dell'elettrone;

H è la costante di Planck normalizzata (i.e. $H = h/(2\pi)$, $h =$ costante di Planck);

E è l'energia dell'elettrone;

V è il potenziale applicato;

w è una funzione legata alla funzione d'onda ($|w(x)|^2$ rappresenta la probabilita' che l'elettrone occupi effettivamente la posizione x).

L'equazione (4) è di tipo (*3*) con

$$a(x) = 0, \qquad b(x) = \frac{2m}{H^2}(E - V(x)).$$

Un altro esempio è l'**equazione di Bessel,** ossia l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \qquad x \in (0, +\infty) \tag{5}$$

dove n è un parametro reale, equazione che sarà esaminata in seguito.

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2007-2008
Traccia della lezione del 8 febbraio 2008

February 6, 2008

In questa lezione vengono brevemente presentati altri richiami sull'analisi complessa, gia' visti nel Corso di Applicazioni di Matematica. Pertanto tale lezione e' dedicata in modo particolare agli studenti della laurea specialistica in Ingegneria Matematica. Altro materiale sullo stesso argomento è stato presentato nella lezione del 31 gennaio.

1 Radici in campo complesso e risoluzione di equazioni algebriche.

Determinare le radici n-esime di un dato numero complesso $s_0 \neq 0$ significa risolvere l'equazione $z^n = s_0$. Utilizzando la forma trigonometrica $s_0 = \rho_0(\cos\theta_0 + j\sin\theta_0)$, $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$ (ρ_0, θ_0 dati del problema, ρ, θ incognite), mediante l'utilizzo delle formule di De Moivre si ottiene

$$\rho^n = \rho_0, \quad n\theta = \theta_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Infatti due numeri complessi coincidono se e solo se hanno uguale modulo e argomento che differisce per multipli di 2π. Essendo ρ_0 reale positivo, la prima equazione ha come unica soluzione $\rho = \sqrt[n]{\rho_0}$ (radice reale). Dalla seconda: $\theta = \theta_0/n + 2k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$; si osserva che soltanto per $k = 0, 1, \dots n-1$ risulta $\theta \in [0, 2\pi)$. Pertanto le radici n-esime di s_0 sono date da:

$$\sqrt[n]{s_0} = \sqrt[n]{\rho_0}\left[\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

dove $\rho_0 = |s_0|$, $\theta_0 = \mathrm{Arg}(\mathrm{s}_0)$.

Pertanto:

- **Le radici distinte sono esattamente** n.
- **Tali radici hanno tutte lo stesso modulo** e quindi si trovano su una medesima circonferenza, di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho_0}$.
- Tali radici **sono i vertici di un poligono regolare di** n **lati, inscritto in tale circonferenza.** Quindi tali radici differiscono tra loro per una rotazione di un multiplo di $2\pi/n$.

La radice n-esima in $\mathbb{C}$ quindi *non* è una funzione, ma una applicazione a più valori. Ad esempio la radice quadrata in $\mathbb{C}$ restituisce due valori (opposti) ($\sqrt{-4} = \pm 2j$).

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2007-2008
Tracce delle lezioni del 13 e 15 febbraio 2008

February 15, 2008

1 Equazioni differenziali lineari del 2 ordine

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{1}$$

dove le funzioni a, b sono continue a tratti in un intervallo $I = (\overline{x}, +\infty)$ dell'asse reale (non è escluso il caso in cui I coincida con $\mathbb{R}$, ossia che $\overline{x} = -\infty$).

Come si è detto la lezione scorsa, nel caso in cui i coefficienti a e/o b non siano costanti (o costanti a tratti), determinare tutte le soluzioni di (1) può non essere semplice. Poiché lo spazio delle soluzioni di (1) ha dimensione 2, per la risolubilità di (1) è sufficiente determinare due soluzioni di (1) linearmenti indipendenti. In realtà è sufficiente conoscerne una, come ora mostreremo.

Moltiplicando l'equazione (1) per $e^{\int_{x_0}^x a(s)ds}$ si ottiene

$$e^{\int_{x_0}^x a(s)ds}y'' + a(x)e^{\int_{x_0}^x a(s)ds}y' + b(x)e^{\int_{x_0}^x a(s)ds}y = 0$$

ossia

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0, \tag{2}$$

dove

$$p(x) = e^{\int_{x_0}^x a(s)ds}$$
$$q(x) = b(x)e^{\int_{x_0}^x a(s)ds}$$

L'equazione (2) prende nome di *equazione lineare in forma autoaggiunta ed è* è **equivalente** a (1), nel senso che

le soluzioni di (1) sono tutte e sole quelle di (2).

Si osservi in particolare che la funzione p in (2) è positiva. Vale il seguente:

Teorema - *Sia u una soluzione di (2) e sia $u(x) \neq 0$ per $x \in [x_0, x_1] \subset I$. Allora la funzione*

$$v(x) = u(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{p(r)u^2(r)} dr \tag{3}$$

è anch'essa soluzione di (2) ed è linearmente indipendente da u.

Per verificare che v è soluzione di (2), è sufficiente derivare e sostituire in (2). Per verificare che u e v siano linearmente indipendenti, come dovrebbe essere ben noto, è sufficiente provare che il determinante della matrice wronskiana

$$\begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{pmatrix}$$

è positivo.

In virtù di quanto detto, ogni soluzione y di (2) [o equivalentemente di (1)] è rappresentata dalla formula

$$y(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x)$$

dove u, v sono soluzioni di (2), v è data da (3) e c_1, c_2 sono due opportune costanti reali.

2 L'oscillazione

Definizione - Sia y una soluzione di (1), diversa dalla soluzione nulla; y si dice *oscillante* se esiste una successione $\{x_n\}$, con $x_n \to +\infty$, tale che $y(x_n) = 0$, ossia se y ha infiniti zeri che si "accumulano all'infinito". In caso contrario y si dice *nonoscillante.*

Poiché per (1) vale la proprietà dell'unicità della soluzione rispetto ai dati iniziali, il grafico di una soluzione oscillante di (1) "taglia" l'asse x infinite volte (per $x \to +\infty$).

Vale il seguente:

Teorema di Sturm - *Tutte le soluzioni nonbanali di (1) hanno lo stesso carattere rispetto all'oscillazione, ossia o tutte oscillano o tutte nonoscillano.*

In virtù di tale risultato allora non possono coesistere per una stessa equazione di tipo (1) soluzioni oscillanti e nonoscillanti; pertanto (1) si dice *oscillante* o *nonoscillante* a seconda che tutte le sue soluzioni (diverse dalla soluzione nulla) siano oscillanti o nonoscillanti.

E' evidente che (1) è oscillante se e solo se lo è (2). Cio' premesso, si ha il seguente:

Teorema di confronto di Sturm - *Si considerino le due equazioni*

$$(p_1(x)y')' + q_1(x)y = 0, \tag{4}$$

$$(p_2(x)y')' + q_2(x)y = 0, \tag{5}$$

dove per ogni x sufficientemente grande

$$p_1(x) \geq p_2(x) \qquad \text{e} \qquad q_1(x) \leq q_2(x).$$

Se (4) è oscillante, allora (5) è oscillante
Se (5) è nonoscillante, allora (4) è nonoscillante.

L'equazione (4) è chiamata *minorante* e (5) *maggiorante.* Il motivo di tale denominazione è dovuto al caso in cui $p_1(x) = p_2(x) = 1$. In questo caso tali equazioni si riducono, rispettivamente, a

$$y'' + q_1(x)y = 0,$$
$$y'' + q_2(x)y = 0,$$

e tale denominazione è evidente, in quanto per ogni x grande si ha $q_1(x) \leq q_2(x)$.

Il Teorema di confronto di Sturm non sempre consente di stabilire se una assegnata equazione lineare del secondo ordine sia oscillante oppure no. Ad esempio, tale teorema non è applicabile all'equazione

$$y'' + \frac{1}{x}y = 0. \tag{6}$$

Un altro criterio di oscillazione è il seguente

Teorema di Leigthon -
(i) L'equazione (2) è oscillante se

$$\int^{\infty} \frac{1}{p(x)} dx = \int^{\infty} q(x) dx = \infty.$$

(ii) L'equazione (2) è nonoscillante se

$$\int^{\infty} \frac{1}{p(x)} dx < +\infty, 0 \leq \int^{\infty} q(x) dx < +\infty$$

oppure se

$$q(x) \leq 0 \qquad \textit{per ogni } x \textit{ sufficientemente grande.}$$

- ESEMPI

Applicando il Teorema di Leigthon si ottiene facilmente:
1) L'equazione (6) è oscillante. Così pure è oscillante l'equazione

$$y'' + \frac{2x^2+1}{4x^2+4} y = 0.$$

2) L'equazione

$$y'' + \frac{1-2x^2}{4x^2+4} y = 0$$

è nonoscillante.

3) L'equazione di Bessel (**??**) è oscillante. Infatti, in forma autoaggiunta essa diviene

$$(xy')' + \frac{x^2-n^2}{x} y = 0,$$

e quindi dal criterio di Leigthon (parte i) si ha l'asserto, in quanto

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad q(x) = \frac{x^2-n^2}{x}.$$

3 L'equazione di Bessel (caso n intero positivo)

Come detto, si chiama **equazione di Bessel** l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \qquad x \in (0, +\infty) \tag{B}$$

dove n è un parametro reale.

Nel caso particolare in cui n sia un intero nonnegativo, si può dimostrare che tra le soluzioni di (B) vi sono le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \tag{7}$$

Le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie* e godono delle seguenti proprietà:

1. se n è pari, allora J_n è una serie di polinomi pari;
2. se n è dispari, allora J_n è una serie di polinomi dispari;
3. $J_0(0+) = 1$; $J_n(0+) = 0$ per n intero positivo.
4. Le funzioni J_n sono funzioni oscillanti e smorzate, ossia $\lim_{x\to+\infty} J_n(x) = 0$.

4 La funzione Gamma Euleriana

Si chiama *Gamma Euleriana* la funzione

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Tale integrale converge per ogni valore positivo del parametro reale x e quindi la funzione Gamma Euleriana è definita in $(0, \infty)$. Essa gode delle seguenti proprietà (di immediata verifica):

1. $\Gamma(1) = 1$;

2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (e quindi $\Gamma(2) = 1$);

3. $\Gamma(x+2) = x(x+1)\Gamma(x)$;

4. $\Gamma(x+3) = x(x+1)(x+2)\Gamma(x)$;

   ....

5. $\Gamma(x+n) = x(x+1).....(x+n-1)\Gamma(x)$;

Ponendo in (5) $x = 1$ si ha poi l'importante proprietà

$$\Gamma(n+1) = n!$$

ossia **la funzione Gamma Euleriana è l'estensione al caso continuo del concetto di fattoriale.**

Come conseguenza delle relazioni 1) ,...5) si ha che la funzione Γ è nota, quando siano noti i valori che Γ assume in $(0, 1]$. Infatti se Γ è nota in $(0, 1]$, usando 2) si ottiene che Γ è nota anche in $(1, 2]$. Usando poi 3) si ottiene che Γ è nota anche in $(2, 3]$, e così via. Tale risultato puo' essere migliorato. Infatti è possibile provare che per $x \in (0, 1/2]$ vale la relazione

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

e da tale relazione ne segue che se Γ è nota in $(0, 1/2]$, allora Γ è nota anche in $[1/2, 1)$.

In conclusione:

I valori della funzione Γ sono noti, non appena siano noti i valori che Γ assume in $(0, 1/2]$.

Per tale motivo i valori di Γ vengono usualmente tabulati per $x \in (0, 1/2]$.

Usando le relazioni 2), ...5) è possibile poi estendere la definizione della funzione Γ anche sul semiasse negativo, ad eccezione dei punti $0, -1, -2, -3, ...$ Infatti da 2) si ha per $x \neq 0$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1);$$

poichè il secondo membro ha senso anche per $x \in (-1,0)$ si puo' usare tale relazione per estendere la definizione di Γ anche all'intervallo $(-1,0)$. In altre parole si pone

$$\Gamma(x) =_{\text{def}} \frac{1}{x}\Gamma(x+1) \qquad \text{se } x \in (-1,0).$$

Usando poi le relazioni 3)..5) si puo' procedere nell'estensione della definizione di Γ sul semiasse negativo. Precisamente si ha

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &=_{\text{def}} \frac{1}{x(x+1)}\Gamma(x+2) \qquad \text{se } x \in (-2,-1) \\
\Gamma(x) &=_{\text{def}} \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\Gamma(x+3) \qquad \text{se } x \in (-3,-4) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si osservi infine che per quanto riguarda il comportamento della funzione Γ nei punti $x = 0, x = -1, x = -2,$ ..... si ha

$$\lim_{x \to -n} |\Gamma(x)| = +\infty \tag{8}$$

con $n = 0, 1, 2, \ldots$

5 Funzioni di Bessel (caso n reale)

Indicata con Γ la funzione Gamma Euleriana, per ogni $n \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \tag{9}$$

sono soluzioni dell'equazione di Bessel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x \in (0, +\infty) \tag{B}$$

Le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie.* Se n è intero positivo, poiché $\Gamma(k+n+1) = (n+k)!$, l'espressione (9) si riduce a quella vista in precedenza.

Nel caso particolare in cui n sia un intero negativo, i primi n termini della serie (9) sono nulli, in quanto $|\Gamma(k+n+1)| = +\infty$. Ad esempio, per $J_{-7}(x)$ si ha

$$J_{-7}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-6)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-7}. \tag{10}$$

Poiché $|\Gamma(k-6)| = +\infty$ se $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, i primi 7 termini di (10) sono nulli e quindi la somma in tale serie inizia effettivamente da $k = 7$, ossia

$$J_{-7}(x) = \sum_{k=7}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-6)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-7}.$$

Vale il seguente:

Teorema
(i) Fissato $n \in \mathbb{R}$ le funzioni J_n e J_{-n} sono entrambe soluzioni di (B).
(ii) Se n è intero, i.e. $n \in \mathbb{Z}$, allora

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x),$$

e quindi J_n e J_{-n} sono linearmente dipendenti.
(iii) Se n è reale, ma non intero, i.e. $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, allora J_n e J_{-n} sono linearmente indipendenti.

Pertanto se $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ricordando che lo spazio delle soluzioni di (B) ha dimensione 2, dal Teorema precedente (punto (iii)) si ha che tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x), \tag{11}$$

dove c_1,c_2 sono due arbitrarie costanti reali. Scegliendo poi in (11)

$$c_1 = \frac{\cos\ \pi n}{\sin\ \pi n}, \qquad c_2 = \frac{-1}{\sin\ \pi n}$$

si ottiene la soluzione di (B) data da

$$Y_n(x) = \frac{\cos\ \pi n}{\sin\ \pi n} J_n(x) - \frac{1}{\sin\ \pi n} J_{-n}(x) \qquad (n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Le funzioni Y_n si chiamano *funzioni di Bessel di seconda specie* e, per quanto appena detto, sono anch'esse soluzioni di (B).

Nel caso infine in cui n sia intero, si definiscono le funzioni di Bessel di seconda specie nel modo seguente:

$$Y_n(x) = \lim_{p \to n} \left(\frac{\cos\ \pi p}{\sin\ \pi p} J_p(x) - \frac{1}{\sin\ \pi p} J_{-p}(x) \right) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

e si può provare che anche in tal caso le funzioni Y_n sono soluzioni di (B).

Inoltre le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n sono linearmente indipendenti da J_n, sia nel caso n intero che nel caso $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Pertanto per ogni n reale tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$d_1 J_n(x) + d_2 Y_n(x),$$

dove d_1 e d_2 sono due arbitrarie costanti reali.

Infine si chiamano *funzioni di Hankel* le funzioni

$$H_n^{\pm}(x) = J_n(x) \pm j Y_n(x)$$

dove j rappresenta l'unità immaginaria.

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2007-2008
Tracce delle lezioni del 20, 21 e 28 febbraio 2008

February 22, 2008

1 Funzioni di Bessel - Relazioni di ricorrenza

Per le funzioni di Bessel valgono le seguenti formule:

$$\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(x^{-n} J_n(x)\right) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

Da tali formule si ottengono poi le cosidette *formule di ricorrenza*

$$\begin{aligned} xJ_n'(x) &= xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x) \\ xJ_n'(x) &= nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) \\ 2J_n'(x) &= J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \\ 2nJ_n(x) &= xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Le precedenti formule continuano a valere anche per le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n.

2 Le distribuzioni

2.1 Definizione

Indichiamo con L^1_{loc} lo spazio vettoriale

$$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ assolutamente integrabili in ogni compatto di } \mathbb{R}\} \, ;$$

vogliamo costruire un'estensione di tale spazio.

Ricordiamo che una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *a supporto compatto* se esiste un intervallo compatto (i.e. limitato e chiuso) $[a,b]$ dell'asse reale tale che $\varphi(t) = 0$ se $t \notin [a,b]$. L'intervallo $[a,b]$, all'esterno del quale φ è nulla, si chiama *supporto di* φ. E' evidente che la funzione φ è univocamente individuata non appena siano noti i valori assunti da φ sul supporto.

Si consideri poi lo spazio vettoriale D formato da tutte le funzioni reali (di variabile reale) infinitamente derivabili e a supporto compatto, ossia

$$D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\} \, .$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni test* ed è possibile definire in tale spazio una nozione di convergenza (vedi Appendice).

Si osservi poi che il supporto dipende dalla funzione φ considerata. Ad esempio la funzione α data da

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-t^2)} & \text{se } |t| < 1 \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

appartiene a D ed il suo supporto è $[-1,1]$. Analogamente la funzione β data da

$$\beta(t) = \begin{cases} e^{-1/(4-t^2)} & \text{se } |t| < 2 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a D ed il suo supporto è $[-2,2]$.

Ciò premesso si chiama *spazio delle distribuzioni* l'insieme formato da tutti i funzionali (vedi Appendice) lineari e continui definiti su D. Tale spazio si indica con il simbolo $\mathfrak{D}$ ossia

$$\mathfrak{D} = \{T : D \to \mathbb{R}, \ \text{lineare e continuo}\}$$

Pertanto $T \in \mathfrak{D}$ se :
1) T è un funzionale, i.e. $T : D \to \mathbb{R}$
2) T è lineare, ossia

$$T(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1T(\varphi_1) + c_2T(\varphi_2), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D.$$

3) T è continuo, ossia se $\{\varphi_n\} \xrightarrow{D} \varphi$, allora $\{T(\varphi_n)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi)$.

2.2 Esempi

Sono elementi di $\mathfrak{D}$ (e quindi distribuzioni) i seguenti funzionali (dove φ indica una generica funzione di D):

1. $T_{\sin t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \sin t \; dt$
2. $T_{t^3}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \; t^3 \; dt$
3. $T_{e^t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \; e^t \; dt$.

   In generale, **fissata** una funzione $f \in L^1_{loc}$, sono elementi di $\mathfrak{D}$ i funzionali del tipo

4. $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \; \varphi(t) \; dt$,

   dove φ indica, come prima, una generica funzione di D.

   Altre distribuzioni (i.e. elementi di $\mathfrak{D}$) sono poi i funzionali

5. $\Delta_0(\varphi) = \varphi(0)$
6. $\Delta_a(\varphi) = \varphi(a)$

   dove a è un generico numero reale e φ è una generica funzione di D.

Usualmente i funzionali Δ_0, Δ_a vengono indicati con i simboli $\delta(t), \delta(t-a)$.

In riferimento all'Esempio 1., il valore $T_{\sin t}(\varphi)$, assunto dal funzionale T, viene indicato con

$$T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle \, .$$

Il simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si chiama *crochet;* e la scrittura $\langle \sin t, \varphi(t) \rangle$ si legge *crochet tra* $\sin t$ *e* φ.

Pertanto le distribuzioni sopra definite negli Esempi 1., 2., 3., 4. si indicano anche con i simboli

1. $T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \sin t \; dt$
2. $T_{t^3}(\varphi) = \langle t^3, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \; t^3 \; dt$
3. $T_{e^t}(\varphi) = \langle e^t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \; e^t \; dt.$
4. Per ogni $f \in L^1_{loc}$ fissata

$$T_f(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt. \tag{1}$$

   Analogamente per le distribuzioni $\delta(t)$ e $\delta(t-a)$ si ha

5. $$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(0)$$

6. $$\langle \delta(t-a), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(a).$$

2.3 Le distribuzioni come estensione dello spazio L^1_{loc}

Mostriamo che lo spazio $\mathfrak{D}$ è una estensione dello spazio

$$L^1_{loc} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ assolutamente integrabili in ogni compatto di } \mathbb{R} \} .$$

Ricordiamo che in tale spazio due funzioni f, g, coincidono se

$$f(t) = g(t), \qquad \text{eccetto un insieme di misura nulla.}$$

Ciò premesso si ha il seguente:

Teorema - *Siano $f, g \in L^1_{loc}$. Se*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \; \varphi(t) \; dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) \; \varphi(t) \; dt \qquad \forall \varphi \in D \tag{2}$$

(ossia, usando le notazione con il crochet, se

$$\langle f(t), \varphi(t) \rangle = \langle g(t), \varphi(t) \rangle \qquad \forall \varphi \in D \;) \tag{3}$$

allora f e g coincidono in L^1_{loc}. Vale poi, ovviamente, il viceversa, ossia se f e g coincidono in L^1_{loc}, allora (2) [i.e.(3)] è soddisfatta.

Da questo risultato ne segue che le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}$, definite tramite funzioni di L^1_{loc}, ossia le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}$ il cui crochet è dato da (1) sono *"tante quanti gli elementi di L^1_{loc}".*

In altre parole se indichiamo con $\mathfrak{D}^*$ il sottoinsieme di $\mathfrak{D}$ formato da tutte le distribuzioni il cui crochet è dato da (1), ossia

$$\mathfrak{D}^* = \left\{ T \in \mathfrak{D} \ : \exists f \in L^1_{loc} : T(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt \qquad \forall \varphi \in D \right\},$$

per il Teorema precedente il sottospazio $\mathfrak{D}^*$ è in corrispondenza biunivoca con L^1_{loc}, ossia

$$\mathfrak{D}^* \sim L^1_{loc}$$

Quindi lo spazio delle distribuzioni $\mathfrak{D}$ può essere interpretato come una estensione di L^1_{loc}.

In altre parole, ogni $f \in L^1_{loc}$ può essere pensata come distribuzione (precisamente quella il cui crochet è definito da (1). Non è difficile poi provare che si tratta di una **effettiva** estensione, in quanto esistono anche distribuzioni, ad esempio $\delta(t), \delta(t-a)$, che **non** possono essere definite tramite funzioni di L^1_{loc}, e quindi che non appartengono a $\mathfrak{D}^*$.

Pertanto si ha

$$L^1_{loc} \sim \mathfrak{D}^* \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{D}$$

i.e. $\mathfrak{D}^*$ è strettamente contenuto in $\mathfrak{D}$, in quanto, come si è appena affermato, le distribuzioni $\delta(t), \delta(t-a)$, prima considerate, non sono elementi di $\mathfrak{D}^*$.

3 Derivata di una distribuzione

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Allora $f' \in L^1_{loc}$ e quindi f' può essere pensata come distribuzione e sia ha

$$\langle f'(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(t) \ \varphi(t) \ dt$$

Utilizzando poi la regola di integrazione per parti si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} f'(t) \ \varphi(t) \ dt = -\int_{\mathbb{R}} f(t) \ \varphi'(t) \ dt = -\langle f(t), \varphi'(t) \rangle ;$$

pertanto

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \langle f'(t), \varphi(t) \rangle = -\langle f(t), \varphi'(t) \rangle .$$

Tale relazione suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione; si chiama *derivata di T* (nel senso delle distribuzioni) e si indica con DT, la distribuzione definita da

$$\langle DT, \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} - \langle T, \varphi'(t) \rangle , \ \forall \varphi \in D.$$

Proprietà:

- Ogni distribuzione è derivabile infinite volte.
- $$\text{Se } f \in C^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow f' \equiv Df$$
- Indicata con $u = u(t)$ la funzione scalino (di Heaveside)

  $$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

  si ha

  $$D[u(t)] = \delta(t).$$
- $$D[u(t) - u(t-a)] = \delta(t) - \delta(t-a).$$
- **Teorema -** *Se $f \in C^1(\mathbb{R}/\{t_0\})$ e $f' \in L^1_{loc}$, allora*

  $$f(t_0+) = \lim_{t \to t_0+} f(t), \qquad f(t_0-) = \lim_{t \to t_0-} f(t),$$

  esistono finiti e si ha

  $$Df = f'(t) + [f(t_0+) - f(t_0-)]\delta(t - t_0).$$

  Ad esempio per la funzione

  $$f(t) = \begin{cases} 5e^{2t} & \text{se } t > 0 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ,$$

  si ha

  $$Df = f'(t) + 5\delta(t).$$

  Il teorema precedente si estende poi immediatamente al caso in cui f sia derivabile con derivata continua in tutto $\mathbb{R}$, eccetto un numero finito o un'infinità numerabile di punti.

- La distribuzione $\delta(t)$ è derivabile e si ha

$$\langle \delta'(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} -\varphi'(0), \ \forall \varphi \in D$$
$$\langle \delta''(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} \varphi''(0), \ \forall \varphi \in D$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\left\langle \delta^{(n)}(t), \varphi(t) \right\rangle =_{\text{def}} (-1)^n \varphi^{(n)}(0), \ \forall \varphi \in D.$$

  In modo analogo si definiscono le derivate di $\delta(t-a)$.

4 Prodotto di distribuzioni

Ricordiamo che nello spazio L^1_{loc} il prodotto non sempre è definito. Ad esempio la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0,1) \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a L^1_{loc}, ma $f^2 \notin L^1_{loc}$. Tuttavia se $f \in L^1_{loc}$ e $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora il prodotto $f \ g$ è, ovviamente, definito e si ha

$$\langle f \ g, \varphi \rangle = \langle f, g \ \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in D.$$

Tale relazione suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione e sia $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si chiama *distribuzione prodotto* $T \ g$ la distribuzione definita da

$$\langle T \ g, \varphi \rangle = \langle T, g \ \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in D$$

Nello spazio delle distribuzioni si definisce il prodotto soltanto nel caso precedente, i.e. quando almeno uno dei due fattori è una funzione ("tradizionale") di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Pertanto, ad esempio, non si definiscono i simboli $\delta^2(t)$, $e^{-|t|}\delta(t)$, $(\log t)\delta(t)$, $t^{-7}\delta(t)$.

Provare che

$$e^{2t}\delta(t) = \delta(t);$$
$$(t^2+4)\delta(t) = 4\delta(t)$$
$$\sin t\delta(t - \frac{\pi}{2}) = \delta(t - \frac{\pi}{2}).$$

ESERCIZI

Verificare che

$$D[(3+5t)\delta'(t-1)] = -5\delta'(t-1) + 8\delta''(t-1)$$
$$(t-1)\delta'(t) = D[(\sin t)\delta'(t) - u(t)]$$
$$tDf = f(t) - 4\delta(t)$$

dove $f(t) = t[u(t) - u(t-2)]$.

4.1 Convergenza nello spazio delle distribuzioni

Per analizzare le proprietà delle distribuzioni è utile introdurre in $\mathfrak{D}$ una nozione di convergenza. Precisamente diremo che *una successione di distribuzioni $\{T_n\}$ converge in $\mathfrak{D}$ ad una distribuzione T se la successione numerica $\{T_n(\varphi)\}$ converge a $T(\varphi)$ per ogni $\varphi \in D$*; ossia

$$\{T_n\} \xrightarrow{\mathsf{D}} T \qquad \text{se} \qquad \{T_n(\varphi)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi) \qquad \forall \varphi \in D$$

o, equivalentemente,

$$\lim_n T_n \overset{\mathsf{D}}{=} T \qquad \text{se} \qquad \lim_n T_n(\varphi) \overset{\mathbb{R}}{=} T(\varphi) \qquad \forall \varphi \in D.$$

Utilizzando tale nozione, si può provare il seguente Teorema (di rappresentazione):

Teorema - *Ogni distribuzione è limite (in $\mathfrak{D}$) di una successione di elementi di L^1_{loc}, ossia*

$$\overline{L^1_{loc}} = \mathfrak{D}.$$

In altre parole il Teorema precedente afferma che per ogni $T \in \mathfrak{D}$ esiste una successione $\{f_n(t)\}$, contenuta in L^1_{loc}, che converge in $\mathfrak{D}$ (nel senso sopra specificato) alla distribuzione T.

Ad esempio è facile provare che la distribuzione $\delta(t)$ sopra definita è il limite (in $\mathfrak{D}$) della successione $\{k_n(t)\}$, dove

$$k_n(t) = \begin{cases} n & \text{se } t \in [0, 1/n] \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In altre parole la distribuzione $\delta(t)$ gode della **importante** proprietà:

$$\delta(t) \overset{\mathsf{D}}{=} \lim_n k_n(t)$$

5 Appendice

5.1 Convergenza nello spazio delle funzioni test

La nozione di convergenza nello spazio D delle funzioni test si definisce nel seguente modo: diremo che una successione $\{\varphi_n\}$ converge a φ se:
1) $\varphi_n, \varphi \in D$;
2) esiste un intervallo compatto I tale che $\varphi_n(t) = \varphi(t) = 0$ se $t \notin I$;
3) la successione $\left\{\varphi_n^{(i)}\right\}$ converge uniformemte a $\varphi^{(i)}$ in $\mathbb{R}$ per $i = 0, 1, 2, 3...$
ossia $\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) :$ per ogni $n > n(\varepsilon)$ si ha $|\varphi_n^{(i)}(t) - \varphi_n^{(i)}(t)| < \varepsilon\ \forall t \in I$
- la successione $\{\varphi_n\}$ converge uniformemte a φ in $\mathbb{R}$, i.e.
$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) :$ per ogni $n > n(\varepsilon)$ si ha $|\varphi_n(t) - \varphi_n(t)| < \varepsilon\ \forall t \in I$
- la successione $\{\varphi_n'\}$ converge uniformemte a φ' in $\mathbb{R}$,
$\forall\varepsilon > 0\ \exists \nu(\varepsilon) :$ per ogni $n > \nu(\varepsilon)$ si ha $|\varphi_n'(t) - \varphi_n'(t)| < \varepsilon\ \forall t \in I$
- la successione $\{\varphi_n''\}$ converge uniformemte a φ'' in $\mathbb{R}$,
- ....

5.2 Funzionale

Sia V uno spazio vettoriale; si chiama *funzionale in* V ogni funzione F definita in V e a valori in $\mathbb{R}$, i.e.

$$F : V \to \mathbb{R}.$$

Ad esempio se V è lo spazio delle funzioni continue in $[0, 1]$, sono funzionali in V i seguenti (dove $x = x(t)$ indica una generica funzione continua in $[0, 1]$):

$$F_1(x) = \int_0^1 x(s)ds$$
$$F_2(x) = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$$
$$F_3(x) = 437x(0) + 567x(1)$$

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2007-2008
Tracce delle lezioni del 5 e 7 marzo 2008

March 7, 2008

1 Le distribuzioni temperate

Si consideri lo spazio vettoriale S definito da

$$S = \left\{ \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) : t^j \varphi^{(k)}(t) \to 0 \text{ per } |t| \to +\infty,\ j,k = 0,1,2,.... \right\}.$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni a decrescenza rapida.* Infatti una funzione φ appartiene a tale spazio se è infinitamente derivabile e tende a zero (per $t \to \pm\infty$), insieme a tutte le derivate $\varphi^{(i)}$, più velocemente di qualunque potenza di t. Ad esempio la funzione $\varphi(t) = e^{-t^2}$appartiene a S.

Ricordando la definizione dello spazio D delle funzioni test

$$D = \{\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\},$$

si ha

$$D \underset{\neq}{\subset} S.$$

E' poi possibile definire in tale spazio una nozione di convergenza.

Ciò premesso si consideri lo spazio formato da tutti i funzionali lineari e continui definiti su S. Tale spazio si indica con il simbolo $\Im$, ossia

$$\Im = \{T : S \to \mathbb{R},\ \text{lineare e continuo}\}$$

Tenendo conto che

$$D \underset{\neq}{\subset} S,$$

si ha allora

$$\Im \subset \mathfrak{D},$$

ossia $\Im$ è un sottospazio di $\mathfrak{D}$. Gli elementi di $\Im$ sono quindi particolari distribuzioni, che prendono nome di *distribuzioni temperate* e il sottospazio $\Im$ si chiama *spazio delle distribuzioni temperate.*

E' possibile provare che sono distribuzioni temperate (i.e. elementi di $\Im$):

1. le funzioni $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ (quindi, in particolare, sono distribuzioni temperate tutte le funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$);
2. le funzioni $f \in L^1_{loc}$ e a crescita lenta, ossia tali che $\exists\ M, q \geq 0$: $|f(t)| \leq M(1 + |t|^q)$;
3. le funzioni $f \in L^1[a, b]$ e periodiche di periodo $b - a$;
4. le distribuzioni $\delta(t)$, $\delta(t - a)$;
5. se $T \in \Im$ allora $DT \in \Im$ (in particolare quindi sono distribuzioni temperate $\delta^{(n)}(t)$, $\delta^{(n)}(t - a)$.

Non sono invece distribuzioni temperate le funzioni

$$e^t, \;\; e^{-t}, \;\; \sinh t, \;\; \cosh t.$$

Quindi $\Im$ è un sottospazio proprio di $\mathfrak{D}$.

Si osservi poi che, in virtù di 2., sono distribuzioni temperate le funzioni costanti, i polinomi, le funzioni $\sin t$, $\cos t$.

2 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Sia $\varphi \in S$. Essendo φ a decrescenza rapida si ha $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi φ ammette trasformata di Fourier. Sia pertanto Φ la sua trasformata, ossia $\Phi(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi\}$. Usando le proprietà della trasformata di Fourier in L^1, è possibile provare che "lo spazio S è chiuso rispetto all'operatore trasformata di Fourier", ossia che vale il seguente:

Lemma - *Sia $\varphi \in S$. Allora $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e, indicata con Φ la sua trasformata di Fourier, si ha $\Phi \in S$.*

Si ha poi il seguente:

Teorema - *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ *e sia* F *la sua trasformata di Fourier, ossia* $F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}$. *Allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\varphi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\Phi(\omega)d\omega, \ \forall\varphi \in S$$

ossia

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle f, \Phi \rangle, \ \forall\varphi \in S$$

o, equivalentemente,

$$\langle \mathcal{F}\{f\}, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle, \ \forall\varphi \in S.$$

Tale Teorema suggerisce la seguente

Definizione - Sia T una distribuzione temperata; si chiama *trasformata di Fourier di* T (nel senso delle distribuzioni) e si indica con $\mathcal{F}_D\{T\}$, la distribuzione temperata definita da

$$\langle \mathcal{F}_D\{T\}, \varphi \rangle =_{\text{def}} \langle T, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle, \ \forall\varphi \in S.$$

Tale definizione riconduce quindi il calcolo della trasformata $\mathcal{F}_D$ a quello della trasformata "classica" $\mathcal{F}$ (i.e. in L^1 o L^2).

Dal Teorema precedente si ha poi la seguente proprietà

- Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}_D\{f\} \equiv \mathcal{F}\{f\}$,ossia se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora la trasformata nel senso delle distribuzioni di f coincide con quella "classica".

La definizione precedente acquista quindi significato per quelle "funzioni" che **non** appartengono a $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$.

In particolare vale la seguente tabella per le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni"elementari" a crescita lenta ($A \in \mathbb{R}$)

funzione	$\rightarrow$	trasformata
1		$2\pi\delta(\omega)$
t		$2\pi j\delta'(\omega)$
t^n		$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$
e^{jAt}		$2\pi\delta(\omega - A)$
$\sin(At)$		$\pi j[\delta(\omega + A) - \delta(\omega - A)]$
$\cos(At)$		$\pi[\delta(\omega + A) + \delta(\omega - A)]$

Per la distribuzione $\delta(t)$ si ha poi

$$\mathcal{F}_D\left\{\delta(t)\right\} = 1$$
$$\mathcal{F}_D\left\{\delta(t-a)\right\} = e^{-ja\omega},\ a \in \mathbb{R}.$$

Vale infine la proprietà

$$T \in \Im \Longrightarrow \mathcal{F}_D\left\{DT\right\} = j\omega\mathcal{F}_D\left\{T\right\}.$$

ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2007-2008
Traccia della lezione del 12 marzo 2008

March 12, 2008

1 Trasformata di Laplace di distribuzioni

Prima di introdurre la trasformata di Laplace nel senso delle distribuzioni, poniamo le seguenti definizioni.

Definizione 1 - Sia T una distribuzione, ossia $T \in \mathfrak{D}$. Allora T si dice *nulla in un intervallo* (a,b) se

$$< T, \varphi(t) >= 0$$

per ogni $\varphi \in D$ e avente supporto in (a,b).

Definizione 2 - Sia T una distribuzione, ossia $T \in \mathfrak{D}$. Si chiama *insieme nullo di* T, e si indica con N_T, l'unione di tutti gli intervalli aperti (a,b) in cui T è nulla. Il suo complementare in $\mathbb{R}$ si chiama poi *supporto di* T.

Poiché N_T è unione (infinita) di aperti, N_T è un insieme aperto di $\mathbb{R}$. Il supporto di T, essendo il complementare di un aperto è allora un insieme chiuso di $\mathbb{R}$.

Esempi

1. Sia f la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t^2+4 & \text{se } t \in [-\pi,\pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Allora $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e quindi f è una distribuzione. L'insieme nullo N_f è

$$N_f = (-\infty, -\pi) \cup (\pi, +\infty)$$

e. di conseguenza, il supporto di f è $[-\pi, \pi]$ (come ovviamente era lecito attendersi).

2. Sia f la funzione

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{se } t \geq 0 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Allora $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e quindi f è una distribuzione. L'insieme nullo N_f è

$$N_f = (-\infty, 0)$$

e. di conseguenza, il supporto di f è $[0, +\infty)$ (come ovviamente era lecito attendersi).

3. Per la distribuzione δ si ha poi $N_\delta = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e quindi il supporto di δ è $\{0\}$. Analogamente il supporto di $\delta(t-a)$ è $\{a\}$.

Ciò posto, si ha la seguente:

Definizione - Fissato $x \in \mathbb{R}$, sia T una distribuzione tale che:
1) il supporto di T è contenuto in $[0, +\infty)$;
2) esiste $\beta \in \mathbb{R}$ tale che $Te^{-\beta t}$ è una distribuzione temperata.
Si chiama allora *trasformata di Laplace (nel senso delle distribuzioni)* e si indica con $L_D[f]$, oppure con $F(s)$, la funzione

$$L_D[T] = F(s) = \left\langle Te^{-\beta t}, e^{\beta t} \lambda(t) e^{-st} \right\rangle \tag{1}$$

dove $\operatorname{Re} s \geq \beta > \alpha$ e λ è una funzione tale che

$$\begin{array}{lll} \lambda \in C^\infty(\mathbb{R}) & & \\ \lambda(t) = 1 & \text{se } t \geq -\varepsilon_1 & (-\varepsilon_1 < 0) \\ \lambda(t) = 0 & \text{se } t \leq -\varepsilon_2, & (-\varepsilon_2 < -\varepsilon_1). \end{array} \tag{2}$$

Si puo' provare che il crochet (1) è indipendente dalla scelta della funzione λ (purché siano verificate le condizioni (2)) e dalla scelta di β. Il crochet (1) dipende quindi soltanto dalla scelta del numero complesso s e pertanto la notazione $F(s)$, usata per indicare tale crochet, è ben posta. Si osservi poi che, per le ipotesi fatte, il primo elemento del crochet, ossia $Te^{-\beta t}$ è una distribuzione temperata, mentre il secondo, i.e. $e^{\beta t}\lambda(t)e^{-st}$, è una funzione a decrescenza rapida.

Proprietà 1: La trasformata di Laplace di una distribuzione T è una **funzione "tradizionale"**, non una distribuzione, come accade invece per la trasformata di Fourier.

Proprietà 2: Se $f \in \Lambda$, allora la trasformata di Laplace di f (in senso classico) **coincide** con la trasformata di Laplace nel senso delle distribuzioni. In altre parole:

$$L_D[f] \equiv L[f].$$

Pertanto la definizione (1) assume significato quando, ferme restando le altre condizioni, T non sia una funzione di classe Λ. In particolare un semplice calcolo prova che:

$$\begin{gathered} L_D[\delta(t)] = 1 \\ L_D[\delta'(t)] = s \\ \dots\dots\dots \\ L_D[\delta^{(n)}(t)] = s^n. \end{gathered}$$

Per quanto concerne le funzioni razionali, il seguente risultato generalizza quello visto alcune lezioni fa'.

Teorema *Ogni funzione razionale*

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

è una trasformata di Laplace. Precisamente, se grado $N <$ grado D, F è la trasformata di Laplace una funzione di classe Λ; altrimenti, se grado $N \geq$ grado D, F è la trasformata di Laplace di di una distribuzione.

Ad esempio la funzione

$$F_1(s) = \frac{s^3 + 8}{s^3 + 3s^2 + 1}$$

è la trasformata di una distribuzione, mentre

$$F_2(s) = \frac{s^2 + 8}{s^3 + 3s^2 + 1}$$

è la trasformata di una funzione di classe Λ.

Teorema derivazione *Sia* $f \in C^1(0, +\infty)$, $f, f' \in \Lambda$. *Allora si ha*

$$\begin{array}{rc} L[f'] = sL[f] - f(0+) & \text{("derivazione in senso classico")} \\ L_D[Df] = sL[f] & \text{("derivazione nel senso delle distrib.")} \end{array}$$