ANALISI MATEMATICA 3 (ELS+TES+MAS) A.A. 2008-2009

ESERCIZI - parte prima

January 22, 2009

1 Trasformata di Fourier

Notazione : indichiamo con $u(t)$ la funzione scalino, ossia

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 1.1 - Stabilire quali delle seguenti funzioni è trasfomabile secondo Fourier in L^1 e/o in L^2.

$$f_1(t) = e^{-t};\ f_2(t) = e^{-t}u(t);\ f_3(t) = e^{t};\ f_4(t) = e^{t}u(t);$$

$$f_5(t) = e^{-|t|};\ f_6(t) = e^{t}[u(t) - u(t-7)];\ f_7(t) = \frac{1}{t}u(t);$$

$$f_8(t) = \frac{1}{t}u(t-5);\ f_9(t) = \frac{1}{t^2}u(t);\ f_{10}(t) = \frac{1}{t^2}u(t-6);$$

$$f_{11}(t) = \frac{1}{t-4}u(t-4);\ f_{12}(t) = \frac{1}{t-4}u(t-7);$$

$$f_{13}(t) = \frac{1}{(t-4)^3}u(t-7);\ f_{14}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}[u(t) - u(t-4)];$$

$$f_{15}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}u(t-4).$$

ESERCIZIO 1.2 - A quale delle funzioni di cui all'Esercizio 1.1 è applicabile il Teorema di Plancherel?

ESERCIZIO 1.3 - Si considerino le funzioni

$$\begin{aligned} g_1(t) &= 5t^2[u(t) - u(t-9)] \\ g_2(t) &= (\sin t)e^{-t^2} \\ h_1(t) &= g_1(t-4)e^{jt} \\ h_2(t) &= g_2(t+\pi)e^{-3jt}. \end{aligned}$$

Tali funzioni ammettono trasformata di Fourier in L^1? E in L^2 ? In caso affermativo la trasformata di Fourier è continua ? E' derivabile? Se sì, quante volte?

ESERCIZIO 1.4 - Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{t^2+5t+8};\ f_2(t) = \frac{t-2}{t^2+5t+8}; \\ f_3(t) &= \frac{2}{3+2t^2};\ f_4(t) = \frac{t+1}{2t^2+3}; \\ f_5(s) &= \frac{t+5}{t^2+2t+j};\ f_6(t) = \frac{5}{t^2+2jt+j}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.5 - Calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni

$$\begin{aligned} g_i(t) &= f_i(t)e^{5jt} \\ h_i(t) &= f_i(t-9) \end{aligned}$$

dove le funzioni f_i sono definite nell'Esercizio 1.4.

ESERCIZIO 1.5 - Calcolare l'antitrasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \frac{2\omega}{\omega^2+j};\ F_2(\omega) = \frac{2\omega}{\omega^2-j}; \\ F_3(\omega) &= \frac{2j}{\omega^2+4};\ F_4(\omega) = \frac{2\omega}{\omega^2+\omega+6}; \\ F_5(\omega) &= \frac{1}{j\omega+1};\ F_6(\omega) = \frac{\omega-4}{(\omega-4)^2+6}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.6 - Calcolare l'antitrasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$G_i(\omega) = F_i(\omega)e^{3j\omega},$$

dove le funzioni F_i sono definite nell'Esercizio 1.5.

ESERCIZIO 1.7 - Quali delle seguenti funzioni sono trasformate di Fourier in L^2 ?

$$F_1(\omega) = \frac{\omega + j}{\omega + 1};\ F_2(\omega) = \frac{\omega + j}{\omega^2 + 1};$$
$$F_3(\omega) = \frac{\omega + j}{\omega^2 - 1};\ F_4(\omega) = \frac{7\omega + 2}{\omega^2 + 9};$$
$$F_5(\omega) = \frac{\omega^2 + 7\omega + 2}{\omega^3 + 9};\ F_4(\omega) = \frac{\omega^2 + 7\omega + 2}{\omega^4 + 9}.$$

ESERCIZIO 1.8 - A quale delle seguenti funzioni è applicabile il Lemma di Jordan?

$$F_1(s) = \frac{5s^2 + 4}{s^2 + 16}; F_2(s) = \frac{5s^2 + 4}{s^2 + 16}e^{-s}; F_3(s) = \frac{5s + 4}{s^2 + 16}.$$

ESERCIZIO 1.9 - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, reale dispari e a supporto compatto. Sia F la sua trasformata di Fourier. Quanto vale $F(0)$?

ESERCIZIO 1.10 - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, e sia F la sua trasformata di Fourier. E' vera l'affermazione

$$\lim_{\omega \to +\infty} F(\omega) = \lim_{\omega \to 0} \omega F(\omega)\ ?$$

RISPOSTE:

Esercizio 1.1 : sono trasformabili in L^1 e in L^2 le funzioni f_2, f_5, f_6, f_{10}, f_{13}. Sono trasformabili in L^2 e non in L^1 le funzioni f_8, f_{12}. E' trasformabile in L^1 e non in L^2 la funzione f_{14}. Le altre funzioni non sono trasformabili né in L^1 né in L^2.

Esercizio 1.2 : E' applicabile alle funzioni trasformabili in L^2, ossia a f_2, f_5, f_6, f_8, f_{10}, f_{12}, f_{13}.

Esercizio 1.3 : tutte le funzioni considerate ammettono trasformata sia in L^1 che in L^2. Poiché sono trasformabili in L^1, le trasformate sono funzioni continue. Applicando la proprietà della "moltiplicazione per t" e i suoi corollari, si ha che tutte le trasformate sono di classe C^∞.

Esercizio 1.7 : sono trasformate in L^2 le funzioni F_2 e F_4. Non lo sono le altre.

ANALISI MATEMATICA 3
ELS+TES+MAS
A.A. 2008-2009
ESERCIZI - parte SECONDA

February 4, 2009

1 Trasformata Laplace

Esercizio 1.1 Utilizzando la formula di Bromwich-Mellin e la teoria dei residui, calcolare le antitrasformate di Laplace delle seguenti funzioni razionali:

$$F_1(s) = \frac{1}{s^2+4s+5};\ F_2(s) = \frac{1}{s^2+4s+3};$$
$$F_3(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+s};\ F_4(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-2)(s^2+4)};$$
$$F_5(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s+2)}; \qquad F_6(s) = \frac{s^2+2s-1}{s^3-2s^2+2s-1}.$$

Esercizio 1.2 Quale o quali delle seguenti funzioni è la trasformata di Laplace di una distribuzione?

$$G_1(s) = \frac{s^2+4}{s^2-4};\ G_2(s) = \frac{s^2+4}{s^2-4s};\ G_3(s) = \frac{s+4}{s^2-4};$$
$$G_4(s) = \frac{s^2+4}{s^3-4};\ G_5(s) = \frac{s^3+4s}{s^2-4}; G_6(s) = \frac{s^4+4}{s^2-4s};$$
$$G_7(s) = \frac{s}{s^4-4};\ G_8(s) = \frac{4}{s^2-4};\ G_9(s) = \frac{s^4+4s^2}{s^3-4}.$$

Esercizio 1.3 - Si considerino le seguenti funzioni. Quale o quali ammette trasformata di Laplace in senso classico? (Si assuma che tali funzioni sono nulle per $t < 0$). In caso affermativo, si determini l'ascissa di convergenza α_f.

$$\begin{array}{ll} f_1(t) = e^{-t^2}; & f_2(t) = t^7 + 14t^6; \\ f_3(t) = t\cos t; & f_4(t) = e^t \cos t^2; \\ f_5(t) = e^{t^2}\cos t; & f_6(t) = t^{-4}. \end{array}$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 21 & \text{se } t > 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$
$$g_2(t) = \begin{cases} e^t \sin t & \text{se } t > 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$
$$g_3(t) = \begin{cases} t^{-4} & \text{se } t > 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Esercizio 1.4 - A quale o quali delle seguenti funzioni e' applicabile il Lemma di Jordan?

$$f_1(s) = \frac{s^2-1}{s^2+2}; f_2(s) = \frac{s-1}{s^2+2}; f_3(s) = \frac{1}{|s|}; f_4(s) = e^{-s}.$$

Soluzioni Esercizio 1.1 Per $t > 0$ si ha:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^{-2t}\sin t \\ f_2(t) &= \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t}) \\ f_3(t) &= 1 - e^{-t} - te^{-t} \\ f_4(t) &= \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t \\ f_5(t) &= \frac{1}{9}(e^{-2t} - e^t + 3te^t) \\ f_6(t) &= 2e^t + e^{t/2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right). \end{aligned}$$

(Tali funzioni sono inoltre nulle per $t < 0$).

2 Equazioni differenziali lineari

Esercizio 2.1 Stabilire quale delle seguenti equazioni è oscillante e quale nonoscillante.

$$\begin{array}{ll}
1) & y''-7y'+(x^2-1)e^{7x}y=0\\
2) & y''+7xy'+(1-x^2)y=0\\
3) & y''+\frac{1}{x}y'+4y=0\\
4) & y''+5xy'-4xy=0\\
5) & y''+\frac{3-x}{x+3}y=0\\
6) & y''+\frac{x^3-3x-1}{x(x^2+9)}y=0
\end{array}$$

Risposta: sono oscillanti le equazioni 1), 3) e 6); nonoscillanti le altre.

Esercizio 2.2 Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y''+a(x)y'+b(x)y=0, \tag{1}$$

dove le funzioni a e b sono continue in $[0,\infty)$.

1) La funzione $tg\ x$ puo' essere soluzione di (1)?

2) Le funzioni $y_1(x)=75x-1$, $y_2(x)=x\sin x$ possono essere contemporaneamente soluzioni di (1)?

Esercizio 2.3 Data l'equazione differenziale lineare

$$y''+5xy'-5y=0,$$

si verifichi che $y(x)=x$ è una sua soluzione e si determini un'altra soluzione linearmente indipendente.

ANALISI MATEMATICA 3
ELS+TES+MAS
A.A. 2008-2009
ESERCIZI - parte TERZA

February 10, 2009

1 Funzioni di Bessel

Esercizio 1.1 Siano J_3 e J_8 due funzioni di Bessel. Calcolare l'espressione

$$J_3(5) + J_{-3}(5) + J_8(1) - J_{-8}(1).$$

Esercizio 1.2 Calcolare

$$3\Gamma(4/3) - \Gamma(1/3) + \Gamma(1),$$

dove Γ è la funzione gamma euleriana.

Esercizio 1.3 Si consideri la funzione Γ euleriana. Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + 1 = 2\Gamma(1)$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + 2\Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \Gamma(3) = 2\Gamma(1)$$

Esercizio 1.4 Siano J_n e Y_n le funzioni di Bessel di prima e seconda specie. Si stabilisca se ciascuna delle seguenti affermazioni è corretta o errata.

i) - la funzione Y_n è oscillante;

ii) - Per ogni n intero positivo $\exists M_n > 0$ tale che $Y_n(x) > M_n$ se x è sufficientemente grande;

iii) - Sia n non intero. le tre funzioni J_n, J_{-n}, Y_n sono linearmente indipendenti.

Esercizio 1.5 Siano $\{\lambda_k\}$ gli zeri di $J_4(x)$. Puo' aversi $J_4'(\lambda_k) = 0$?

2 Oscillazione

Esercizio 2.1 Stabilire quale delle seguenti equazioni è oscillante e quale nonoscillante

$$\begin{array}{ll} 1) & y'' + 4xy' + e^{-4x^2} y = 0 \\ 2) & y'' + (3 - \sin x) y = 0 \\ 3) & y'' - 2y' + 6e^{4x} y = 0 \end{array}$$

Risposta: sono oscillanti le equazioni 2) e 3); nonoscillanti la 1).

Esercizio 2.2 Studiare, al variare del parametro reale λ, l'oscillazione dell'equazione

$$y'' + 5\lambda e^x y = 0.$$

Esercizio 2.3 Esiste un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine del tipo

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

con a e b funzioni continue per ogni x reale avente per soluzione $y(x) = (x - 15)^2$?

ANALISI MATEMATICA 3 (ELS+TES+MAS) A.A. 2008-2009
ESERCIZI - parte quarta

February 26, 2009

1 Funzioni di Bessel -Formule ricorrenza

Esercizio 1.1 Siano J_n le funzioni di Bessel. Stabilire quale delle seguenti uguaglianze è corretta

$$2J_3'(2) - 3J_{-3}(2) = 3J_2(2)$$
$$2J_3'(2) - 3J_{-3}(2) = 2J_2(2)$$
$$2J_3'(2) - 3J_{-3}(2) = 2J_3(2)$$

2 Distribuzioni - Generalità

Sia u la funzione

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

ESERCIZIO 2.1 - Calcolare la derivata, nel senso delle distribuzioni, di:

$$\begin{array}{lll} 3e^{5t}\delta(t-1); & u(t) - u(t-8); & 3e^{5t} + e^{-4t}\delta(t); \\ (t^2+2t-6)\delta(t); & u(t) + 5t\delta(t); & (t^2+2t)\delta(t+1); \\ \sin t + \delta(t); & (\sin t)\delta(t-5); & (\sin t)\delta(t). \end{array}$$

ESERCIZIO 2.2 - Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$$
\begin{aligned}
&\sin(2t) \cdot \delta'(t) = 0 \\
&\sin(2t) \cdot \delta'(t) = -2\delta(t) \\
&\sin(2t) \cdot \delta'(t) = \delta'(t) \\
&\sin(2t) \cdot \delta'(t) = u(t) + 2\delta(t).
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 2.3 - Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

$$
\begin{aligned}
&5t\delta'(t) + \delta(t) = \delta'(t) \\
&5t\delta'(t) + \delta(t) = -4\delta(t) \\
&5t\delta'(t) + \delta(t) = \delta'(t) + 5u(t).
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 2.4 - Date le funzioni

$$
f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{se } t \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

$$
g(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in (1,2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},
$$

calcolare Df, Dg, $D[e^t f(t)]$, $D[e^{-t} g(t)]$, $e^t Df$, $e^{-t} Dg$ [Il simbolo D indica la derivata nel senso delle distribuzioni].

ESERCIZIO 2.5 - Quali tra le seguenti sono distribuzioni? In caso affermativo calcolarle.

$$
\begin{array}{lll}
T_1 = e^{5t}\delta'(t+1); & T_2 = u(t)\delta(t); & T_3 = t^{-4}\delta(t-4); \\
T_4 = t^2 u(t)\delta(t); & T_5 = t^2[\delta(t-1) - \delta'(t)]; & T_6 = |t|(t^2+2)\delta(t+2); \\
T_7 = (\sin t)\delta(t-4); & T_8 = (\sin t^2)\delta(t+1); & T_9 = (\sin t)u(t)\delta(t-3).
\end{array}
$$

3 Trasf. Fourier di Distribuzioni

ESERCIZIO 3.1 - Quale delle seguenti distribuzioni è una distribuzione temperata?

$$
\begin{array}{lll}
2t + \sin 5t; & t\delta(t) + t\delta(t-1); & t + e^t; \\
t + e^t\delta(t); & e^{-t}\delta(t-1); & e^{-t} + \delta(t); \\
\cos t + \delta(t+4); & 1 + \cos 2t; & e^{-t} + \sin t; \\
(1 + \sin 3t)\delta(t-2); & 1 + 7t^2; & (1 + 7t^2)\delta(t).
\end{array}
$$

ESERCIZIO 3.2 - Calcolare la trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni) delle distribuzioni di cui all'Esercizio 3.1 che sono temperate.

Calcolare poi la trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni) della derivata (nel senso delle distribuzioni).

ESERCIZIO 3.3 - Data la funzione

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{se } t \in (0,4) \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si calcoli la trasformata di Fourier di Df, di tDf, di $(t-4)Df$.

ESERCIZIO 3.4 - Quale delle seguenti è una distribuzione?

$$\begin{array}{lll} (t+6)\delta(t); & e^t + e^{-t}\delta(t); & (\log t)\delta'(t); \\ \delta^2(t); & (t-4)^{-2}\delta(t+2); & (\sin 5t)\delta(t); \\ (\sin 5t)\delta'(t); & e^{-5t} - 5; & (e^{5t}+5)\delta(t). \end{array}$$

Quale delle precedenti è una distribuzione temperata? Per quelle che lo sono si calcoli la trasformata di Fourier e la trasformata di Fourier della derivata (nel senso delle distribuzioni).