APPLICAZIONI di MATEMATICA
A.A. 2009-2010

Tracce delle lezioni del 5 e 7 ottobre 2009

October 6, 2009

1 Equazioni esponenziali e logaritmo in $\mathbb{C}$.

Sia s_0 un numero complesso, $s_0 \neq 0$. Scrivendo tale numero in forma trigonometrica si ottiene $s_0 = \rho_0(\cos\theta_0 + j\sin\theta_0)$, con $\rho_0 \neq 0$. Ciò posto, si consideri l'equazione

$$e^z = s_0.$$

Ponendo $z = x + jy$ tale equazione allora diviene:

$$e^x(\cos y + j\sin y) = \rho_0(\cos\theta_0 + j\sin\theta_0),$$

da cui

$$x = \log\rho_0, \quad y = \theta_0 + 2k\pi j, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Otteniamo quindi infinite soluzioni date da:

$$z = x + jy = \log|s_0| + j(\mathrm{Arg}(s_0) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Tutte tali soluzioni hanno tutte la stessa parte reale (il logaritmo in $\mathbb{R}$ del modulo di s_0) e differiscono nella parte immaginaria per multipli di 2π. A tale espressione si dà il nome di *logaritmo in campo complesso*.

Sottolineiamo il fatto che, come nel caso della radice, questa non è una funzione "tradizionale" in $\mathbb{C}$, perchè assume più di un valore (precisamente assume infiniti valori).

Esempi:

1) - Risolvere l'equazione

$$e^s = 1.$$

Da (1) si ha

$$s = \log|1| + j(\mathrm{Arg}(1) + 2k\pi) = 2k\pi j, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

2) - Risolvere l'equazione

$$e^s = 4j.$$

Da (1) si ha

$$s = \log|4j| + j(\mathrm{Arg}(4j) + 2k\pi) = \log 4 + j(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

3) - Risolvere l'equazione

$$e^{1/(s-1)} = -1.$$

Ponendo

$$z = \frac{1}{s-1} \tag{2}$$

si ottiene l'equazione

$$e^z = -1$$

Da (1) si ha poi

$$z = \log|-1| + j(\mathrm{Arg}(-1) + 2k\pi) = j(\pi + 2k\pi), \ \ k \in \mathbb{Z}$$

e quindi, in virtù di (2),

$$\frac{1}{s-1} = j(\pi + 2k\pi), \ \ k \in \mathbb{Z},$$

ossia

$$s = 1 + \frac{1}{j(\pi + 2k\pi)} = 1 - \frac{j}{(1+2k)\pi}, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

2 Teoremi di Cauchy per l'integrale

Teorema 1 (di Cauchy) *Sia γ una curva regolare (o generalmente regolare) semplice e chiusa e sia f una funzione analitica all'interno di γ e continua su γ. Allora:*

$$\int_\gamma f(s)ds = 0.$$

Tale Teorema esprime il fatto che, in una regione in cui f è analitica, **l'integrale è indipendente dal cammino.**

Si osservi che se la funzione integranda non è analitica in TUTTA la regione limitata dalla curva γ, allora l'integrale puo' non essere nullo, come illustra l'esempio (visto la lezione scorsa)

$$\int_C \frac{1}{s-s_0} ds = 2\pi j. \tag{3}$$

dove $C(t) = s_0 + re^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r > 0$.

Teorema 2 (di Cauchy) *Siano γ_1 e γ_2 due curve regolari (o generalmente regolari) semplici, chiuse, percorse nello stesso senso con γ_1 contenente γ_2 [vedi figura 1]. Sia s_0 un punto interno a γ_2 e sia f analitica all'interno di γ_1 eccetto il punto s_0. Sia poi f continua su γ_1. Allora*

$$\int_{\gamma_1} f(s)ds = \int_{\gamma_2} f(s)ds.$$

Tale risultato esprime il fatto che l'integrale lungo una curva regolare (o generalmente regolare), semplice e chiusa non cambia se si "deforma con continuità la curva" purchè la funzione considerata sia analitica in tutta la regione compresa tra la curva originaria e la curva "deformata".

Ricordando l'integrale (3), si ha allora

$$\int_\gamma \frac{1}{s-s_0} ds = 2\pi j$$

dove γ è una **qualunque** curva regolare (o generalmente regolare), semplice e chiusa **contenente al proprio interno** il punto s_0.

Teorema 3 (di Cauchy) *Siano Γ, γ_1 e γ_2 tre curve regolari (o generalmente regolari) semplici, chiuse, percorse nello stesso senso poste come in figura 2. Siano s_1 e s_2 due punti interni rispettivamente a γ_1 e γ_2 e sia f analitica all'interno di Γ eccetto i punti s_1 e s_2. Sia poi f continua su Γ. Allora*

$$\int_\Gamma f(s)ds = \int_{\gamma_1} f(s)ds + \int_{\gamma_2} f(s)ds.$$

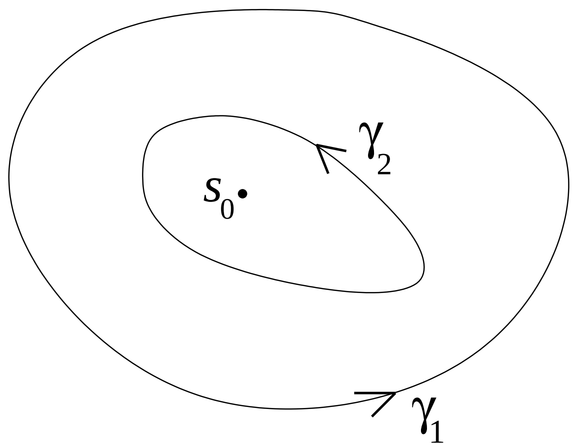

Figura 1

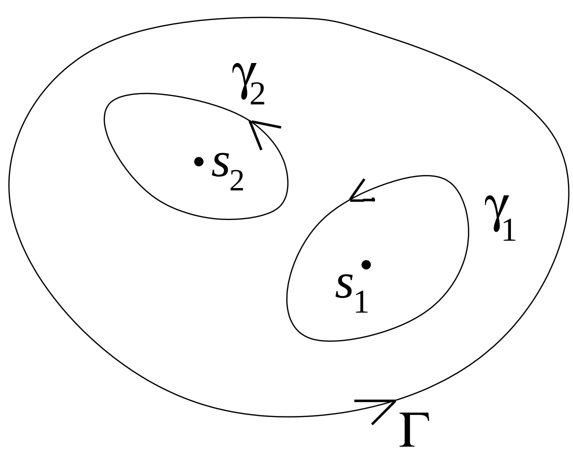

Figura 2

3 Serie di Laurent

Teorema di Laurent *Sia f una funzione analitica in un intorno V di s_0, eccetto, al più s_0, ossia* $\mathbf{f} \in \mathbf{C^1(V/\{s_0\})}$ *Ciò posto per $s \in V/\{s_0\}$ si ha*

$$f(s) = \underbrace{...\frac{c_{-k}}{(s-s_0)^k} + ... + \frac{c_{-1}}{s-s_0}}_{(+)} + \underbrace{c_0 + c_1(s-s_0) + .. + c_k(s-s_0)^k + ...}_{(*)} \tag{4}$$

dove i coefficienti c_k (chiamati coefficienti di Laurent) sono dati dalla formula

$$c_k = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-s_0)^{k+1}}ds \tag{5}$$

e γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo, interna all'intorno V e contenente al proprio interno il punto s_0.

La serie (4) si chiama serie di Laurent in s_0; la serie (+) in (4) si chiama **parte principale** della serie di Laurent e la parte (*) **parte analitica.**

PROPRIETA':

♦ Lo sviluppo in serie di Laurent è unico.

♦ La serie di Laurent è derivabile termine a termine in ogni insieme chiuso contenuto in $V/\{s_0\}$.

4 Serie di Taylor

Dal Teorema di Laurent si ha allora il seguente:

Corollario 1 (Taylor). *Sia f analitica in tutto V, s_0 compreso. Allora per ogni $s \in V$ is ha*

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(s-s_0)^k = c_0 + c_1(s-s_0) + .. + c_k(s-s_0)^k + ... \tag{6}$$

La formula (6) esprime il fatto che una funzione analitica in un intorno V di un punto s_0 è in tale intorno sviluppabile in serie di potenze e tale serie (i.e. (6)) si chiama *serie (o sviluppo) di Taylor di f in s_0.*

Usando poi le formule (5) e la derivabilita' termine a termine della serie (6), si ottiene il seguente.

Corollario 2. *Sia f analitica in tutto V, s_0 compreso e sia (6) la serie di Taylor associata. Allora*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!}.$$

Dal Corollario 1 si ha poi il risultato (già anticipato):

Corollario 3. *Sia V un intorno di s_0 e sia f una funzione, $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Allora le seguenti quattro affermazioni sono* ***equivalenti****:*

-1) $f \in C^1(V)$ [i.e. f è analitica in V];

-2) le funzioni u, v ($u = \mathrm{Re}\, f, v = \mathrm{Im}\, f$) sono derivabili parzialmente in V con derivate continue ed inoltre in V valgono le formule (di Cauchy-Riemann):

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= v_y(x, y) \\ u_y(x, y) &= -v_x(x, y); \end{aligned}$$

-3) $f \in C^\infty(V)$;

-4) f è sviluppabile in serie di potenze in V.

Si osservi che nell'ambito dell'analisi reale in generale si ha

$$\begin{aligned} 1) &\not\Rightarrow 3) \\ 3) &\not\Rightarrow 4). \end{aligned}$$

- Utilizzando la proprietà che lo sviluppo di Taylor (6) è unico, si ottengono i seguenti sviluppi "notevoli":

$$\begin{aligned} e^s &= 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + ... + \frac{s^n}{n!} + ... && \forall s \in \mathbb{C} \\ \sin s &= s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... && \forall s \in \mathbb{C} \\ \cos s &= 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{s^{2n}}{(2n)!} + ... && \forall s \in \mathbb{C} \\ \frac{1}{1-s} &= 1 + s + s^2 + ... + s^n + ... && \forall s : |s| < 1. \end{aligned}$$

5 Singolarità

Definizione 1 - *Un punto* s_0 *si dice* ***punto singolare per*** f *se non esiste alcun intorno* I *di* s_0 *tale che* f *sia analitica in TUTTO* I.

Definizione 2 - *Sia* s_0 *un punto singolare per* f. *Allora* s_0 *si dice* ***punto singolare isolato*** *(o* ***singolarità isolata****) se esiste un intorno* V *di* s_0 *tale che* f *sia analitica in* $V/\{s_0\}$ *(i.e.* f *è analitica in tutto* V *eccetto* s_0*). Altrimenti il punto* s_0 *si dice* ***non isolato*** *(o* ***punto di accumulazione****).*

Esempi

$$f_1(s) = \frac{s^2+1}{(s-2)(s-4)^3} \Rightarrow s = 2, s = 4 \text{ sono sing. isolate.}$$
$$f_2(s) = \overline{s} \qquad \Longrightarrow \text{ogni punto } s \in \mathbb{C} \text{ è una sing. non isolata}$$
$$f_3(s) = \frac{1-\cos s}{s^2} \Longrightarrow \ s = 0 \text{ è singolarità isolata}$$
$$f_4(s) = \sin(1/s) \Longrightarrow s = 0 \text{ è sing. isolata}$$
$$f_5(s) = \frac{1}{\sin(1/s)} \ \Longrightarrow s = 0 \text{ è sing. non isol.}, s_k = \frac{1}{k\pi} \text{ sono sing. isol. } (k \neq 0)$$

Per quanto riguarda l'ultimo esempio, il ragionamento si basa anche sulla seguente proprietà delle funzioni trigonometriche in campo complesso :

Proprietà:

Gli zeri della funzione seno (o coseno) in $\mathbb{C}$ *coincidono con gli zeri della funzione seno (o, rispettivamente, coseno) in* $\mathbb{R}$*"*

5.1 Singolarità isolate

Definizione 3 - *Sia* s_0 *una singolarità isolata per* f. *Allora* s_0 *si chiama:*

♦ ***singolarità eliminabile*** *se*

$$\lim_{s \to s_0} f(s) \text{ esiste finito:}$$

♦ ***singolarità polare*** *se*

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = \infty;$$

♦ ***singolarità essenziale*** *se*

$$\lim_{s \to s_0} f(s) \text{ non esiste.}$$

♦ *Nel caso in cui s_0 sia una singolarità polare, allora s_0 si dice* ***polo di ordine*** *$N > 0$ (con N numero naturale) se*

$$\lim_{s \to s_0} (s - s_0)^N f(s) \text{ è finito e diverso da } 0 \, .$$

In riferimento agli esempi di prima si ha: la funzione f_1 ha in $s = 2$ un polo semplice e in $s = 2$ un polo triplo. La funzione f_3 ha in $s = 0$ una sing. eliminabile. La funzione f_4 ha in $s = 0$ una singolarità essenziale. La funzione f_5 ha in $s_k = 1/(k\pi)$ $(k \neq 0)$ singolarità polari semplici.

Teorema (IMPORTANTE!!) *Sia s_0 una singolarità isolata per f. Allora:*

(i) *s_0 è singolarità eliminabile se e solo se la parte principale della serie di Laurent associata non c'è (i.e. $c_k = 0$ per ogni indice $k < 0$);*

(ii) *s_0 è singolarità polare di ordine $N(> 0)$ se e solo se nella serie di Laurent associata si ha $c_{-N} \neq 0$ e $c_{-k} = 0$ per ogni indice $k > N$ (e quindi la parte principale è composta da un numero finito di termini);*

(iii) *s_0 è singolarità essenziale se e solo se la parte principale della serie di Laurent associata ha infiniti termini.*

Esempio. Si consideri la funzione $f(s) = s \sin(1/s)$. Sviluppando f in serie di Laurent in un intorno di $s = 0$ si ha

$$\begin{aligned} f(s) = s \sin \frac{1}{s} &= s \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{3!} \frac{1}{s^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{s^5} + \ldots. \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{3!} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{5!} \frac{1}{s^4} + \ldots. \qquad . \end{aligned}$$

Poiché la parte principale di tale sviluppo ha infiniti termini, allora $s = 0$ è una singolarità essenziale per $f(s) = s \sin \frac{1}{s}$.