

# APPLICAZIONI di MATEMATICA

## A.A. 2009-2010

Traccia delle lezioni del 12 e 14 ottobre 2009

October 14, 2009

### 1 Classificazione del punto all'infinito.

La classificazione delle singolarità al finito si estende con facilità al punto all'infinito. Precisamente:

**Definizione** - Il punto  $s = \infty$  si dice singolarità (isolata o non isolata e, in quest'ultimo caso, eliminabile, polare o essenziale) se lo è il punto  $u = 0$  per la funzione  $g(u) = f(1/u)$ .

**Esempi** - Classificare il punto  $s = \infty$  per le funzioni razionali

$$f(s) = \frac{2s}{9s+1}, \quad g(s) = \frac{2s^5}{9s+1}, \quad h(s) = \frac{2s}{9s^3+1}.$$

Per la funzione  $f$ , il punto  $s = \infty$  è un punto di regolarità e così per  $h$  (in quest'ultimo caso  $s = \infty$  è anche uno zero doppio). Per la funzione  $g$ , il punto  $s = \infty$  è un polo di ordine 4.

In generale, una funzione razionale (i.e. il rapporto tra due polinomi  $N$  e  $D$ )

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

ha un polo in  $s = \infty$  di ordine  $p > 0$  se e solo se

$$\text{grado}N - \text{grado}D = p.$$

**Esercizio** - Classificare  $s = \infty$  per le funzioni seguenti:

$$f(s) = e^{1/s} \quad (s = \infty \text{ punto "regolare"})$$

$$f(s) = s \sin\left(\frac{1}{s}\right) \quad (s = \infty \text{ sing. elim.})$$

$$f(s) = \frac{1}{\sin s} \quad (s = \infty \text{ sing. non isolata})$$

$$f(s) = e^s \quad (s = \infty \text{ sing. essenziale})$$

$$f(s) = \frac{s^3 + 1}{s + 4} \quad (s = \infty \text{ polo di ordine 2}).$$

Nella classificazione delle singolarità si rivelano particolarmente utili i seguenti:

**Teorema** Ogni funzione **non** razionale ha singolarità essenziali e/o non isolate e viceversa.

**Corollario** Sia  $f$  una funzione razionale. Allora  $f$  è costante oppure ha **soltanto** singolarità di tipo eliminabile e/o polare.

**Esercizio** : Classificare le singolarità di

$$f(s) = \frac{\sin s}{(s - 4)(e^s - 1)}.$$

Soluzione: le singolarità sono  $s = 4$  (polo semplice);  $s = 0$  (eliminabile);  $s_k = 2k\pi j$ ,  $k \neq 0$ , (poli semplici);  $s = \infty$  (non isolata).

## 2 Residui

Sia  $s_0$  una singolarità isolata per  $f$  : esiste quindi un intorno  $V$  di  $s_0$  tale che  $f$  è analitica in  $V/\{s_0\}$ . Si chiama *Residuo di  $f$  in  $s_0$* , e si indica con  $\text{Res}[f, s_0]$  il numero

$$\text{Res}[f, s_0] = c_{-1}$$

dove  $c_{-1}$  è il coefficiente della serie di Laurent associata, relativo al termine  $(s - s_0)^{-1}$ .

Dallo sviluppo in serie di Laurent ne segue (vedi lezioni scorse)

$$\text{Res}[f, s_0] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} f(s) ds$$

dove  $\gamma$  è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo appartenente all'intorno  $V$  e contenente al proprio interno il punto  $s_0$ .

**1° Teorema dei Residui** *Sia  $\Gamma$  una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo. Sia  $f$  analitica all'interno di  $\Gamma$  eccetto un numero FINITO di punti  $s_1, s_2, \dots, s_N$ . Sia infine  $f$  continua su  $\Gamma$ . Allora*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(s) ds = Res[f, s_1] + Res[f, s_2] + \dots + Res[f, s_N].$$

### 3 Formule per il calcolo dei Residui

Si ha:

$$s_0 \text{ sing. eliminabile} \implies Res[f, s_0] = 0; (*)$$

$$s_0 \text{ polo semplice} \implies Res[f, s_0] = \lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0) f(s)$$

$$s_0 \text{ polo ordine } N > 1 \implies Res[f, s_0] = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{ds^{N-1}} [(s - s_0)^N f(s)] (**)$$

Si osservi che il viceversa dell'implicazione (\*) può essere falso. Ad esempio la funzione

$$f(s) = \frac{1}{s^3} \tag{1}$$

ha in  $s = 0$  un polo del terzo ordine. Poiché lo sviluppo in serie di Laurent di  $f$  in un intorno di  $s = 0$  **coincide** con (1) (ricordiamo che tale sviluppo è una serie di potenze di  $s$ , con esponente positivo o negativo), si ha  $c_{-1} = 0$  e, di conseguenza,  $Res[f, 0] = 0$ . Alla stessa conclusione si può giungere utilizzando la formula (\*\*).

**Esempio n. 1** Calcolare ( $\gamma(t) = 3e^{jt}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ )

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{2s + 1}{s(s + 4)(s + 1)^2} ds.$$

Soluzione: le singolarità della funzione integranda interne a  $\gamma$  sono  $s = 0$  e  $s = -1$ . Si ha poi che  $s = 0$  è un polo semplice e  $s = -1$  è un polo doppio. Pertanto

$$I_1 = Res[f, 0] + Res[f, -1]$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f, 0] &= \lim_{s \rightarrow 0} s f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s + 1}{(s + 4)(s + 1)^2} = \frac{1}{4} \\ \operatorname{Res}[f, -1] &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} [(s + 1)^2 f(s)] = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \frac{2s + 1}{s(s + 4)} = \frac{-4}{9}. \end{aligned}$$

**Esempio n. 2** Calcolare ( $\gamma(t) = 3e^{jt}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ )

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{\sin s}{s^3 + 6s^2 + 8s} ds.$$

Soluzione: le singolarità della funzione integranda interne a  $\gamma$  sono  $s = 0$  e  $s = -2$ . Si ha poi che  $s = 0$  è eliminabile e  $s = -2$  è un polo semplice. Pertanto

$$I_2 = \operatorname{Res}[f, 0] + \operatorname{Res}[f, -2]$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f, 0] &= 0 \\ \operatorname{Res}[f, -2] &= \lim_{s \rightarrow -2} (s + 2) f(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{\sin s}{s(s + 4)} = \frac{\sin 2}{4}. \end{aligned}$$

**Esempio n. 3** Calcolare ( $\gamma(t) = 8e^{jt}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ )

$$I_3 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{\sin s}{s^2 - 7s} ds.$$

Soluzione: le singolarità della funzione integranda sono  $s = 0$  e  $s = 7$ . Entrambe sono interne a  $\gamma$ . Si ha poi che  $s = 0$  è eliminabile e  $s = 7$  è un polo semplice. Pertanto

$$I_2 = \operatorname{Res}[f, 0] + \operatorname{Res}[f, 7]$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f, 0] &= 0 \\ \operatorname{Res}[f, 7] &= \lim_{s \rightarrow 7} (s - 7) f(s) = \lim_{s \rightarrow 7} \frac{(s - 7) \sin s}{s(s - 7)} = \frac{\sin 7}{7}. \end{aligned}$$

**Esempio n. 4** Provare che  $(\gamma(t) = 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi])$

$$I_4 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{s}{e^{2s} - 1} ds = 0.$$

**Esempio n. 5** Provare che  $(\gamma(t) = 5e^{jt}, t \in [0, 2\pi])$

$$I_5 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{4}{(s-4)^2 s} ds = 0.$$

## 4 Serie di Laurent all'infinito

Si consideri

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{e^{1/s}}{(s-1)s} ds, \quad (2)$$

dove  $\gamma(t) = 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$ . Le singolarità della funzione integranda (interne a  $\gamma$ ) sono  $s = 0$  e  $s = 1$ . Entrambe sono, ovviamente, isolate e  $s = 1$  è un polo semplice, mentre  $s = 0$  è essenziale. Per calcolare il  $\text{Res}[f, 0]$ , e di conseguenza  $I$ , le formule viste la precedente lezione, non sono utilizzabili. In questo caso possiamo procedere estendendo il Teorema di Laurent all'infinito e introducendo il concetto di Residuo all'infinito. Precisamente

### **Teorema di Laurent in $s = \infty$**

*Sia  $f$  analitica all'ESTERNO di una circonferenza di centro l'origine e raggio  $R$  (sufficientemente grande). Allora per  $s$  tale che  $|s| > R$  si ha*

$$f(s) = \underbrace{\dots \frac{d_{-k}}{s^k} + \dots + \frac{d_{-1}}{s} + d_0}_{(+)} + \underbrace{d_1 s + \dots + d_k s^k + \dots}_{(*)} \quad (3)$$

dove i coefficienti  $d_k$  (chiamati coefficienti di Laurent all'infinito) sono dati dalla formula

$$d_k = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{s^{k+1}} ds, \quad (4)$$

dove  $\Gamma$  è una circonferenza percorsa una sola volta in senso positivo, di centro l'origine e raggio  $R_1 > R$ .

La serie (3) prende nome di *serie di Laurent all'infinito*. Tale serie è **formalmente** analoga alla serie di Laurent in  $s = 0$ , ma solo formalmente.

Infatti quest'ultima converge in un intorno di  $s = 0$ , mentre la serie di Laurent all'infinito (3) converge per  $|s|$  grande.

La serie (+) in (3) si chiama *parte analitica* della serie di Laurent all'infinito e la parte (\*) *parte principale*. Quindi all'infinito parte analitica e parte principale "si scambiano" (eccetto  $d_0$ ).

## 5 Residuo all'infinito

**Definizione.** Sia  $f$  analitica per  $|s|$  sufficientemente grande, i.e. per  $|s| > R$ . Questo fatto implica che  $s = \infty$  è una singolarità isolata per  $f$  oppure un punto di regolarità. Si chiama *Residuo di  $f$  all'infinito*, e si indica con  $\text{Res}[f, \infty]$ , il numero

$$\text{Res}[f, \infty] = -d_{-1}$$

dove  $d_{-1}$  è il coefficiente della serie di Laurent all'infinito (3), relativo al termine  $s^{-1}$ .

Da (4) si ha allora

$$\text{Res}[f, \infty] = -\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(s) ds$$

dove  $\Gamma$  è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo che contiene al proprio interno **tutte** le singolarità al finito di  $f$ .

I concetti di Residuo all'infinito e Residuo al finito presentano differenze **sostanziali**. Ad esempio  $s = \infty$  può essere una singolarità eliminabile (oppure un punto di regolarità) ed aversi

$$\text{Res}[f, \infty] \neq 0$$

il che al finito NON può accadere. E' sufficiente, ad esempio, considerare la funzione

$$f(s) = \frac{5}{s} + \frac{7}{s^2}$$

per la quale si ha  $\text{Res}[f, \infty] = -5 \neq 0$ , eppure  $s = \infty$  è uno zero per  $f$ .

Inoltre  $s = \infty$  può essere un polo semplice ed aversi

$$\text{Res}[f, \infty] = 0$$

il che al finito NON puo' accadere. E' sufficiente considerare la funzione

$$g(s) = 4s + 8$$

per la quale si ha  $Res[g, \infty] = 0$ , eppure  $s = \infty$  è un polo semplice per  $g$ .

**2° Teorema dei Residui** *Sia  $f$  analitica in tutto il piano complesso eccetto un numero FINITO di punti  $s_1, s_2, \dots, s_N$ . Allora la somma di tutti i Residui, compreso il Residuo all'infinito, è nulla, ossia*

$$Res[f, s_1] + Res[f, s_2] + \dots + Res[f, s_N] + Res[f, \infty] = 0.$$

## 6 Formule per il calcolo del Residuo all'infinito.

Per quanto visto, il  $Res[f, \infty]$  è definito se e solo se  $f$  è analitica per  $|s|$  sufficientemente grande o, EQUIVALENTEMENTE, se e solo se  $s = \infty$  è una singolarità isolata per  $f$  oppure un punto di regolarità.

Il  $Res[f, \infty]$  non è pertanto definito quando  $s = \infty$  è una singolarità non isolata (di accumulazione) per  $f$ .

Diremo poi che  $s = \infty$  è *uno zero di ordine  $p$  per  $f$*  se  $f$  è analitica per  $|s|$  sufficientemente grande e

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^p f(s) \quad \text{esiste finito e non nullo.} \quad (5)$$

Utilizzando la serie di Laurent all'infinito, si può provare che  $s = \infty$  è *uno zero di ordine  $p$  per  $f$*  se e solo se lo sviluppo di Laurent all'infinito è del tipo

$$f(s) = \frac{d_{-p}}{s^p} + \frac{d_{-p-1}}{s^{p+1}} + \frac{d_{-p-2}}{s^{p+2}} + \dots, \text{ con } d_{-p} \neq 0.$$

Infine si osservi che la condizione (5) è equivalente alla seguente

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f^{(i)}(s) = 0 \text{ per } i = 0, 1, \dots, N-1, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} f^{(N)}(s) \text{ esiste finito e non nullo.}$$

**Teorema 1** *Sia  $f$  analitica per  $|s|$  grande. Allora se  $s = \infty$  è uno zero per  $f$  di ordine MAGGIORE di 1, si ha*

$$Res[f, \infty] = 0.$$

**Teorema 2** *Sia  $f$  analitica per  $|s|$  grande. Allora*

$$Res[f, \infty] = -Res[g(u), 0], \quad (6)$$

dove

$$g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2}, \quad (7)$$

Si osservi che il Teorema 2 riconduce il calcolo del residuo all'infinito al calcolo del residuo al finito (in zero) della funzione "ausiliaria"  $g$ .

## 7 Esercizi

◆ 1) Calcolare

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{4}{(s-4)^2 s} ds,$$

dove  $\gamma(t) = 5e^{jt}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Le singolarità della funzione integranda sono  $s = 0$  (polo semplice) e  $s = 4$  (polo doppio). Sono entrambe interne a  $\gamma$  e quindi, per il primo Teorema dei Residui si ha

$$I_1 = \text{Res}[f, 0] + \text{Res}[f, 4].$$

Applicando il secondo Teorema dei Residui si ha anche

$$\text{Res}[f, 0] + \text{Res}[f, 4] + \text{Res}[f, \infty] = 0$$

e quindi

$$I_1 = -\text{Res}[f, \infty].$$

Poiché  $f$  ha in  $s = \infty$  uno zero triplo, ne segue  $\text{Res}[f, \infty] = 0$  e quindi

$$I_1 = 0.$$

◆ 2) Calcolare

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{ds}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(s-10)},$$

dove  $\gamma(t) = 5e^{jt}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Applicando il primo e secondo Teorema dei Residui, si ha

$$I_2 = \text{Res}[f, 1] + \text{Res}[f, 2] + \text{Res}[f, 3] + \text{Res}[f, 4] = -\text{Res}[f, 10] - \text{Res}[f, \infty].$$

Poiché la funzione integranda ha uno zero di ordine 5 in  $s = \infty$ , si ha  $\text{Res}[f, \infty] = 0$ . Inoltre, essendo  $s = 10$  polo semplice, si ha

$$\text{Res}[f, 10] = \lim_{s \rightarrow 10} \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)} = \frac{1}{3024}$$

e quindi

$$I_2 = -\frac{1}{3024}.$$

◆ 3) Calcolare

$$I_3 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{(s+1) \sin(1/s)}{s} ds,$$

dove  $\gamma(t) = 5e^{jt}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . L'unica singolarità della funzione integranda al finito è  $s = 0$ , che è di tipo essenziale. In  $s = \infty$  la funzione integranda ha uno zero semplice. Applicando il primo e secondo Teorema dei Residui, si ha

$$I_3 = \text{Res}[f, 0] = -\text{Res}[f, \infty].$$

Da (7) si ha

$$g(u) = \frac{1+u}{u^2} \sin u$$

e poiché  $u = 0$  è un polo semplice per  $g$ , si ha

$$\text{Res}[g, 0] = \lim_{u \rightarrow 0} u g(u) = \lim_{u \rightarrow 0} (1+u) \frac{\sin u}{u} = 1.$$

Applicando la formula (6) si ottiene:

$$\text{Res}[f, \infty] = -1.$$

◆ 4) Calcolare i seguenti integrali lungo le curve indicate:

$$I_4 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{5s+1}{s^4+2} ds \quad \gamma(t) = 6e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

$$I_5 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{4s^8+3}{s^9+1} ds \quad \gamma(t) = 6e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

$$I_6 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{se^{1/s}}{(s-1)(s-3)} ds \quad \gamma(t) = 6e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

$$I_7 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{se^{1/s}}{(s-1)(s-3)} ds \quad \gamma(t) = 2e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

Soluzione :

$$I_4 = 0, I_5 = 4, I_6 = 1, I_7 = 1 - e^{1/3} 3/2.$$

- ◆ 5) Per ciascuna delle seguenti funzioni, stabilire:
- (i) se è applicabile il secondo Teorema dei Residui;
  - (ii) se esiste il residuo all'infinito e, in caso affermativo, calcolarlo.

$$f_1(s) = \frac{e^{1/s^2}}{\sin s^2}; \quad f_2(s) = e^{1/s^2}(\sin s^2)$$
$$f_3(s) = \sin(s^2 + s^4 + 3); \quad f_4(s) = \frac{\sin(s^2 + s^4 + 3)}{s - 3}.$$