APPLICAZIONI di MATEMATICA A.A. 2009-2010

Traccia della lezione del 21 ottobre 2009

October 21, 2009

1 Funzioni analitiche e limitate:proprietà

Il comportamento di una funzione nell'intorno di una singolarità eliminabile è illustrato dal seguente teorema.

Teorema . *Sia s_0 una singolarità isolata per f. Allora s_0 è eliminabile SE E SOLO SE f è limitata in un intorno di s_0.*

Si osservi che tale proprietà non ha riscontro nell'ambito dell'analisi reale. Infatti, come è ben noto, per le funzioni reali di variabile reale la limitatezza di una funzione φ nell'intorno di un punto x_0 NON implica l'esistenza del limite $\lim_{x\to x_0} \varphi(x)$ [Ad esempio è sufficiente considerare la funzione reale $\varphi(x) = \sin(1/x)$, che è limitata in un intorno di $x = 0$, ma per la quale il $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ non esiste].

T**eorema (di Liouville).** *Sia f analitica e limitata in tutto il piano complesso. Allora f è costante.*

Anche questa proprietà non ha riscontro nell'ambito dell'analisi reale. Ad esempio la funzione reale $\psi(x) = \sin x$ è limitata e sviluppabile in serie di potenze, ma non è costante!

Dal Teorema di Liouville si hanno poi le due seguenti conseguenze:

Corollario 1. *Sia f priva di singolarità al finito e all'infinito. Allora f è costante.*

Corollario 2 (Teorema fondamentale dell'algebra di D'Alembert) *Ogni polinomio* P *di grado* $n \geq 1$ *ha almeno uno zero in* C.

Teorema *Sia* f *analitica in un aperto* Ω,*e sia* f *non identicamente nulla. Allora gli eventuali zeri di* f *in* Ω *sono isolati.*

Teorema di Casorati *Sia* s_0 *una singolarità essenziale per* f. *Allora per ogni numero complesso* α, *esiste una successione* $\{s_n\}$ *convergente a* s_0, *tale che la successione trasformata* $\{f(s_n)\}$ *converge ad* α

In altre parole, il Teorema di Casorati esprime il fatto che in **ogni** intorno di una singolarità essenziale la funzione approssima, **con la precisione voluta**, un **qualunque** numero complesso.

2 La Trasformata di Laplace nell'analisi di reti elettriche

Dal volume M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999 :

- Introduzione (Cap. 1 - paragrafo 1.1);
- Funzioni di classe Λ e ascissa di convergenza (Cap. 1 - paragrafo 1.2)
- Definizione di trasformata di Laplace e sua analiticità (Cap. 1, paragrafo 1.3 e Prop. 3.1).
- Proprietà: linearità (Cap. 1 - paragrafo 1.4, Prop. 1.4), derivazione (Cap. 1 - paragrafo 1.9 Teorema 1.5), integrazione (Cap. 1 - paragrafo 1.10 Corollario 1.4), convoluzione (Cap. 1 - paragrafo 1.10 Teorema 1.7).
- Applicazioni a circuiti elettrici (Cap. 1.16)