

APPLICAZIONI di MATEMATICA

A.A. 2009-2010

ESERCIZI parte 4

November 18, 2009

1 Trasformata Zeta

Esercizio 1.1-a) Calcolare la trasformata Zeta dei seguenti campionamenti

$$\begin{aligned} f_n &= (-1)^n(n+1) & ; & & f_n &= (n+4) \cos(5n) \\ f_n &= ne^{7n} \sin 4n & ; & & f_n &= 2^n \\ f_n &= (-1)^n ne^{-8n} & ; & & f_n &= (-1)^n \sin n \end{aligned}$$

Esercizio 1.1-b) Calcolare la trasformata Zeta dei seguenti campionamenti

$$\begin{aligned} f_n &= \begin{cases} e^{2n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} & ; & & f_n &= \begin{cases} e^{-n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \pi & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \\ f_n &= \begin{cases} 4n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 6 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} & ; & & f_n &= \begin{cases} ne^{3n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \\ f_n &= \begin{cases} 4n & \text{se } n = 5k, k \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} & ; & & f_n &= \begin{cases} ne^{3n} & \text{se } n = 4k, k \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\ f_n &= \begin{cases} e^{2n} & \text{se } n = 3k, k \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} & ; & & f_n &= \begin{cases} e^{-n} & \text{se } n = 7k, k \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 1.1-c) Per ciascuno dei campionamenti $\{f_n\}$ di cui all'Esercizio 1.1-b), calcolare la trasformata Zeta delle seguenti convoluzioni

$$f_n * n; \quad f_{n-3} * e^n; \quad e^{7n} f_{n-5} * 1$$

Esercizio 1.2 Quale o quali delle seguenti funzioni è una trasformata Zeta? In caso affermativo, calcolare il raggio di convergenza delle antitrasformate.

$$F_1(z) = \frac{e^z}{z+4}; \quad F_2(z) = \frac{e^{-z}}{z+4}; \quad F_3(z) = \frac{e^{1/z}}{z+4}; \quad F_4(z) = \frac{z^4+4z}{z+4}$$

$$F_5(z) = \frac{z+6}{z^4+4z}; \quad F_6(z) = \sin \frac{1}{z}; \quad F_7(z) = \frac{\sin z}{z}; \quad F_8(z) = \frac{z+2}{z-2}.$$

Esercizio 1.3 Calcolare l'antitrasformata Zeta delle seguenti funzioni razionali

$$F_1(z) = \frac{z+6}{z-6}, \quad F_2(z) = \frac{z+6}{z^2+4z+4}, \quad F_3(z) = \frac{z^3+1}{z^4+1},$$

$$F_4(z) = \frac{z+6}{z^2-16}, \quad F_5(z) = \frac{z+6}{z^2-6z+5}, \quad F_6(z) = \frac{3z^2+2z+1}{2z^2+z}.$$

Esercizio 1.4 Quale è il raggio di convergenza delle antitrasformate delle funzioni di cui all'Esercizio 1.3 ?

Risposte Esercizio 1.2. Sono trasformate Zeta le funzioni F_3, F_5, F_6, F_8 . Non lo sono le altre.

2 Alcuni esercizi "teorici"

Es. 2.1 - Sia F reale, razionale propria reale positiva e $F(0) = 0$. La funzione

$$G(s) = F(s-24)$$

è RP ?

Es. 2.2 - Sia F reale, razionale propria e sia $F(1+j) = -4+j$. Allora F è RP?

Es. 2.3 Siano

$$F_1(z) = \frac{(z-5)(z-1)}{(z+7)(z+9)}; \quad F_2(z) = \frac{(z-5)(z-1)}{(z+7)(z+9)(z+11)}.$$

F_i è una trasf. Zeta? In caso affermativo calcolare il raggio di convergenza.

Es. 2.4 Sia F una trasformata zeta e sia $f_0 = 0$. Quanto vale

$$\text{Res}\left[\frac{F(z)}{z}, \infty\right] ?$$

Es. 2.5 Sia $\{f_n\}$ una successione il cui raggio di convergenza è 1. Quanto vale il raggio di convergenza delle successioni $\{g_n\}, \{h_n\}$, dove

$$g_n = e^{-7n} f_n; \quad h_n = e^{4n} f_n \quad ?$$

Es. 2.6 - Sia F razionale RP dispari. Quanto vale il

$$\lim_{s \rightarrow 0} [F(s) + \frac{1}{F(s)}] ?$$

Es. 2.7 - Sia F reale, razionale pari e $F(-9) = 0$. Tale funzione può essere positiva?

Es. 2.8 - Sia F reale, razionale avente uno zero doppio in $s = \infty$. Tale funzione può essere positiva?

Es. 2.9 - Sia F una trasformata zeta. La funzione $G(z) = z^{-3}F(z)$ è una trasformata zeta? In caso affermativo, quanto vale g_1 ?

Es. 2.10 - A quale delle seguenti trasformate zeta non è applicabile il Teorema del valore finale?

$$F_1(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 + 4z + 3}; F_2(z) = \frac{z - 1}{z + 5}; F_3(z) = \frac{z - 1}{5z - 1}.$$

Es. 2.11 - Sia F una trasformata zeta. Calcolare $\text{Res}[z^{-2}F(z), \infty]$.

Es. 2.12 - Sia

$$F(z) = \frac{z^2 + 6}{z^7 - z^5 + z^3}$$

Calcolare l'antitrasf. zeta per $n = 1$ e $n = 2$.