

# APPLICAZIONI di MATEMATICA

## A.A. 2009-2010

### ESERCIZI parte 4

November 18, 2009

## 1 Trasformata Zeta

**Esercizio 1.1-a)** Calcolare la trasformata Zeta dei seguenti campionamenti

$$\begin{aligned} f_n &= (-1)^n(n+1) & ; & & f_n &= (n+4) \cos(5n) \\ f_n &= ne^{7n} \sin 4n & ; & & f_n &= 2^n \\ f_n &= (-1)^n ne^{-8n} & ; & & f_n &= (-1)^n \sin n \end{aligned}$$

**Esercizio 1.1-b)** Calcolare la trasformata Zeta dei seguenti campionamenti

$$\begin{aligned} f_n &= \begin{cases} e^{2n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} & ; & & f_n &= \begin{cases} e^{-n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \pi & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \\ f_n &= \begin{cases} 4n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 6 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} & ; & & f_n &= \begin{cases} ne^{3n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \\ f_n &= \begin{cases} 4n & \text{se } n = 5k, k \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} & ; & & f_n &= \begin{cases} ne^{3n} & \text{se } n = 4k, k \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\ f_n &= \begin{cases} e^{2n} & \text{se } n = 3k, k \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} & ; & & f_n &= \begin{cases} e^{-n} & \text{se } n = 7k, k \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

**Esercizio 1.1-c)** Per ciascuno dei campionamenti  $\{f_n\}$  di cui all'Esercizio 1.1-b), calcolare la trasformata Zeta delle seguenti convoluzioni

$$f_n * n; \quad f_{n-3} * e^n; \quad e^{7n} f_{n-5} * 1$$

**Esercizio 1.2** Quale o quali delle seguenti funzioni è una trasformata Zeta? In caso affermativo, calcolare il raggio di convergenza delle antitrasformate.

$$F_1(z) = \frac{e^z}{z+4}; \quad F_2(z) = \frac{e^{-z}}{z+4}; \quad F_3(z) = \frac{e^{1/z}}{z+4}; \quad F_4(z) = \frac{z^4+4z}{z+4}$$

$$F_5(z) = \frac{z+6}{z^4+4z}; \quad F_6(z) = \sin \frac{1}{z}; \quad F_7(z) = \frac{\sin z}{z}; \quad F_8(z) = \frac{z+2}{z-2}.$$

**Esercizio 1.3** Calcolare l'antitrasformata Zeta delle seguenti funzioni razionali

$$F_1(z) = \frac{z+6}{z-6}, \quad F_2(z) = \frac{z+6}{z^2+4z+4}, \quad F_3(z) = \frac{z^3+1}{z^4+1},$$

$$F_4(z) = \frac{z+6}{z^2-16}, \quad F_5(z) = \frac{z+6}{z^2-6z+5}, \quad F_6(z) = \frac{3z^2+2z+1}{2z^2+z}.$$

**Esercizio 1.4** Quale è il raggio di convergenza delle antitrasformate delle funzioni di cui all'Esercizio 1.3 ?

**Risposte Esercizio 1.2.** Sono trasformate Zeta le funzioni  $F_3, F_5, F_6, F_8$ . Non lo sono le altre.

## 2 Alcuni esercizi "teorici"

**Es. 2.1** - Sia  $F$  reale, razionale propria reale positiva e  $F(0) = 0$ . La funzione

$$G(s) = F(s-24)$$

è RP ?

**Es. 2.2** - Sia  $F$  reale, razionale propria e sia  $F(1+j) = -4+j$ . Allora  $F$  è RP?

**Es. 2.3** Siano

$$F_1(z) = \frac{(z-5)(z-1)}{(z+7)(z+9)}; \quad F_2(z) = \frac{(z-5)(z-1)}{(z+7)(z+9)(z+11)}.$$

$F_i$  è una trasf. Zeta? In caso affermativo calcolare il raggio di convergenza.

**Es. 2.4** Sia  $F$  una trasformata zeta e sia  $f_0 = 0$ . Quanto vale

$$\text{Res}\left[\frac{F(z)}{z}, \infty\right] ?$$

**Es. 2.5** Sia  $\{f_n\}$  una successione il cui raggio di convergenza è 1. Quanto vale il raggio di convergenza delle successioni  $\{g_n\}, \{h_n\}$ , dove

$$g_n = e^{-7n} f_n; \quad h_n = e^{4n} f_n \quad ?$$

**Es. 2.6** - Sia  $F$  razionale RP dispari. Quanto vale il

$$\lim_{s \rightarrow 0} [F(s) + \frac{1}{F(s)}] ?$$

**Es. 2.7** - Sia  $F$  reale, razionale pari e  $F(-9) = 0$ . Tale funzione può essere positiva?

**Es. 2.8** - Sia  $F$  reale, razionale avente uno zero doppio in  $s = \infty$ . Tale funzione può essere positiva?

**Es. 2.9** - Sia  $F$  una trasformata zeta. La funzione  $G(z) = z^{-3}F(z)$  è una trasformata zeta? In caso affermativo, quanto vale  $g_1$  ?

**Es. 2.10** - A quale delle seguenti trasformate zeta non è applicabile il Teorema del valore finale?

$$F_1(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 + 4z + 3}; F_2(z) = \frac{z - 1}{z + 5}; F_3(z) = \frac{z - 1}{5z - 1}.$$

**Es. 2.11** - Sia  $F$  una trasformata zeta. Calcolare  $\text{Res}[z^{-2}F(z), \infty]$ .

**Es. 2.12** - Sia

$$F(z) = \frac{z^2 + 6}{z^7 - z^5 + z^3}$$

Calcolare l'antitrasf. zeta per  $n = 1$  e  $n = 2$ .