

APPLICAZIONI di MATEMATICA

A.A. 2009-2010

ESERCIZI parte 1

September 28, 2009

1 Numeri Complessi

ESERCIZIO 1.1 - Determinare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:

$$3j; -2; 1+j; -1-j; 1+j\sqrt{3}; 3-j\sqrt{3}; -j\sqrt{5}; \\ (1+j)(1-j); (1+j\sqrt{3})(-1+j); -2+5j.$$

Per ciascuno di tali numeri, si scriva il suo complesso coniugato in forma esponenziale.

ESERCIZIO 1.2 - Calcolare tutti i valori delle seguenti radici nel campo complesso:

$$\sqrt[3]{1}; \sqrt[3]{j}; \sqrt[4]{-1}; \sqrt[6]{-8}; \sqrt[2]{1-j}; \sqrt[2]{5+5j}; \sqrt[2]{5-5j}; \sqrt[3]{-2+5j}; \\ \sqrt[4]{3-j}; \sqrt[2]{2+3j}; \sqrt[5]{2+j}; \sqrt[3]{2-2j}; \sqrt[4]{3+3j}; \sqrt[4]{-1-j\sqrt[2]{3}}.$$

ESERCIZIO 1.3 - Calcolare:

$$\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^8; \frac{(3+3j)^9}{j^6}; \left(\frac{5j}{5+5j}\right)^9.$$

ESERCIZIO 1.4 - Risolvere le seguenti equazioni in campo complesso:

$$\begin{aligned}s^2 + js + 1 = 0; \quad s^2 + s + 3 = 0; \quad s^2 + 2s + j = 0; \quad s^3 + s = 0; \\ s^4 + 1 = 0; \quad s^3 + 27 = 0; \quad s^4 + 16s^2 + 24 = 0; \quad s^4 + j = 0.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.5 - Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni complesse:

$$\begin{aligned}\sin s = 0; \quad \sin s = 1; \quad \cos s = 0; \quad \cos s = 1; \\ \exp(s) = 0; \quad \exp(s) = 1; \quad \exp(s) = j; \quad \exp(1/s) = 1; \\ \sin(s + j) = 0; \quad \sin(s - j) = 1; \quad \cos(s + 2j) = 0; \quad \cos(s - \pi j) = 1; \\ \exp(-s) = 1; \quad \exp(-s) = 0; \quad \exp(1/s) = 2j; \quad \exp(1/2s) = 1;\end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.6 - Determinare le regioni piane individuate dalle seguenti disequaglianze:

$$\begin{aligned}\pi/8 \leq \arg s \leq \pi/3; \quad |s + 2 - 4j| \geq 1; \quad |s - 2| \leq 2; \quad |s + 1| = |s - 1|; \\ \operatorname{Im} s \leq 1; \quad \operatorname{Im} s = 2; \quad |s - 1 + 5j| < 1; \quad \operatorname{Re} s + \operatorname{Im} s < 0.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.7 - Calcolare:

$$\begin{aligned}\log(-3); \quad \log(j); \quad \log(1 - j); \quad \log(-1); \\ \exp(2\pi/j); \quad \exp(4 + 4j); \quad \exp(-1 + 2j).\end{aligned}$$

2 Funzioni complesse - generalità

ESERCIZIO 2.1 - Determinare parte reale e parte immaginaria delle seguenti funzioni complesse di variabile complessa:

$$\begin{array}{lll} s^2 + 3s - j; & s + 5s^2; & 1/(s - j); \\ js + 1/s; & 4\bar{s} + \exp(s); & |s| + j; \\ |s|s + j; & s \exp(-4s); & \bar{s} + |2js|; \\ |s| - s; & 4\bar{s} \exp(s); & -s\bar{s} + j. \end{array}$$

ESERCIZIO 2.2 - Stabilire se le seguenti funzioni complesse sono analitiche, oppure no:

$$\begin{array}{lll} 2(s + s\bar{s}); & s \exp(-4s); & |s| + js; \\ e^s - e^{2s}; & 4\bar{s} \exp(s); & 4s\bar{s}; \\ (s + 1)e^s; & 4s^2 \exp(s); & s/(1 + |s|); \\ s - |s|; & js \sin(2s); & j(|s| + s). \end{array}$$

ESERCIZIO 2.3 - Determinare, se esistono, le funzioni $F = F(s)$ analitiche tali che

$$\begin{array}{ll} a) \operatorname{Re} F(s) = 3(x^2 - y^2) & b) \operatorname{Re} F(s) = -y^3 + 9x^2; \\ c) \operatorname{Im} F(s) = y; & d) \operatorname{Re} F(s) = x^2 + 4x - y^2; \\ e) \operatorname{Re} F(s) = x^2 + 2x - y^2; & f) \operatorname{Im} F(s) = x^2 + y^2; \\ g) \operatorname{Re} F(s) = \operatorname{Re} s + \operatorname{Im} s; & h) \operatorname{Re} F(s) = 7xy + 5x^2 \end{array}$$

3 Classificazione Singolarità

Esercizio 3.1 - Classificare le singolarità delle funzioni razionali:

$$\begin{aligned} f_1(s) &= \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}; & f_2(s) &= \frac{7s^3 + 6}{s^2 + js + 1}; & f_3(s) &= \frac{s - j}{s^2 - 1 + 2js} \\ f_4(s) &= \frac{s^2 - 1}{s^3 + 6s^2 + 5s - 12}; & f_5(s) &= \frac{js^4}{(s + 1)^4}; & f_6(s) &= \frac{js^4}{s^4 + 1}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.2 - Classificare le singolarità delle funzioni non razionali:

$$\begin{aligned} g_1(s) &= \frac{s + 1}{e^s(s - 1)}; & g_2(s) &= \frac{s + 1}{(e^s - 1)s}; & g_3(s) &= \frac{se^{1/s}}{s^2 - 9}; \\ g_4(s) &= \frac{\sin(1/s)}{s^2 - 5s}; & g_5(s) &= \frac{s^2 + 4s + 3}{\sin s}; & g_6(s) &= \frac{s^2 + 4s + 3}{e^s}; \\ g_7(s) &= \frac{\sin(2s)}{s^2 - 2s}; & g_8(s) &= \frac{\sin(2s)}{(s^2 - 2s)^2}; & (*) \quad g_9(s) &= e^{1/s^2} \sin(s^2 + 5). \end{aligned}$$

Soluzioni Esercizio 3.1 -

- f_1 : $\pm j$ poli semplici; ∞ p. regolare;
- f_2 : $-(\sqrt{5} + 1)j/2, (\sqrt{5} - 1)j$ poli semplici; ∞ polo semplice;
- f_3 : $-j$ polo doppio; ∞ zero semplice;
- f_4 : $-4, -3$ poli semplici; -1 sing. eliminabile; ∞ zero semplice;
- f_5 : -1 polo quarto ordine; ∞ p. regolare;
- f_6 : $\pm(\sqrt{2}/2) \pm j(\sqrt{2}/2)$ poli semplici; ∞ p. regolare.

Soluzioni Esercizio 3.2 -

- g_1 : 1 polo semplice; ∞ essenziale;
- g_2 : 0 polo doppio; $2k\pi j, k = \pm 1, \pm 2, \dots$, poli sempl.; ∞ sing. non isolata;
- g_3 : 0 essenziale; ± 3 poli semplici; ∞ zero semplice;
- g_4 : 0 essenziale; 5 polo semplice; ∞ zero ordine 3;
- g_5 : $k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, poli semplici; ∞ sing. non isolata;
- g_6 : ∞ essenziale;
- g_7 : 0 eliminabile; 2 polo semplice; ∞ essenziale;
- g_8 : 0 polo semplice; 2 polo doppio; ∞ essenziale;
- g_9 : 0 essenziale; ∞ essenziale.