ANALISI MATEMATICA III PREREQUISITI SULL'ANALISI COMPLESSA A.A. 2015-2016

March 4, 2016

In questa parte vengono brevemente presentati alcuni richiami
a) sui numeri complessi
b) sulle funzioni complesse e la teoria dei Residui.

Tali argomenti sono già stati trattati in corsi precedenti, ad esempio nel corso di Applicazioni di Matematica. Per maggiori dettagli si rimanda a tale corso e alle tracce delle lezioni di Applicazioni di Matematica in questo stesso sito. Si raccomanda di prendere familiarita' con i concetti qui presentati, anche svolgendo gli esercizi finali.

1 Richiami sui numeri complessi

1.1 Forma algebrica.

Un numero complesso z in forma algebrica è un numero del tipo

$$z = a + jb$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e j, detta *unità immaginaria*, gode della proprietà

$$j^2 = -1.$$

I numeri a e b sono detti, rispettivamente, *parte reale* e *parte immaginaria* di z e si indicano con

$$a = \text{Re}z, b = \text{Im}z.$$

L'insieme dei numeri complessi si indica con il simbolo $\mathbb{C}$. Poiché ogni numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali, esso può essere rappresentato come punto del piano. Per tale motivo l'insieme $\mathbb{C}$ è chiamato anche piano complesso. I numeri z per cui $b = 0$ sono in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$ e l'insieme di tali punti è chiamato *asse reale.* Analogamente, i numeri z per cui $a = 0$ chiamati *immaginari (puri)* e l'insieme da essi formato è detto *asse immaginario.*

L'insieme $\mathbb{C}$ è non ordinato, in quanto si può dimostrare che non è possibile definire in $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine che sia compatibile con quella definita in $\mathbb{R}$.

Dato $z = a + jb \in \mathbb{C}$, si chiama *coniugato di* z, e si indica con $\overline{z}$, il numero

$$\bar{z} = a - jb;$$

quindi, se z è rappresentato nel piano dal punto A, il coniugato di z è rappresentato nel piano complesso $\mathbb{C}$ dal punto simmetrico di A rispetto all'asse reale. Si chiama poi *modulo di* z, e si indica con $|z|$, il numero

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Valgono le seguenti relazioni tra $z, \bar{z}, |z|, \text{Re}z, \text{Im}z$:

$$\begin{aligned} z\ \bar{z} &= |z|^2 \\ \text{Re}z &= (z + \bar{z})/2 \\ \text{Im}z &= (z - \bar{z})/2j. \end{aligned}$$

1.2 Operazioni algebriche

Le operazioni algebriche in $\mathbb{C}$ seguono le ordinarie regole del calcolo algebrico, con l'avvertenza che $j^2 = -1$. Pertanto, posto $z = a + jb, s = c + jd$, si ha

$$\begin{aligned} z + s &= (a + c) + (b + d)j \\ z - s &= (a - c) + (b - d)j \\ zs &= (ac - bd) + (bc + ad)j \\ \frac{z}{s} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}j \text{ (se } s \neq 0). \end{aligned}$$

L'insieme $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, ossia ogni polinomio non costante ha almeno una radice in $\mathbb{C}$. Questa proprietà, nota sotto il nome di Teorema fondamentale dell'algebra o di D'Alembert, è una delle principali motivazioni dell'introduzione dell'insieme dei numeri complessi.

1.3 Norma e distanza in $\mathbb{C}$

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è uno spazio normato con norma data dal modulo, i.e. se $z = a + jb$ allora

$$||z|| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

Pertanto $\mathbb{C}$ è anche uno spazio metrico, dove la distanza $d(z, s)$ tra due numeri $z, s \in \mathbb{C}$ è data da

$$d(z, s) = ||z - s|| = |z - s|.$$

Si chiama *intorno* di un punto z_0 in $\mathbb{C}$ di raggio δ l'insieme

$$I_\delta(z_0) = \{z : |z - z_0| < \delta\}.$$

Geometricamente $I_\delta(z_0)$ è l'interno di una circonferenza di centro z_0 e raggio δ.

Così, ad esempio,

$$|z - 3 + 2j| < 1, \tag{1}$$

avendosi

$$|z - 3 + 2j| = |z - (3 - 2j)|$$

(1) rappresenta l'interno di una circonferenza di centro $z_0 = 3 - 2j$ e raggio 1, mentre

$$|z + j| > 5$$

rappresenta l'esterno di una circonferenza di centro $-j$ e raggio 5.

1.4 Forma trigonometrica di un numero complesso.

Dato $z \neq 0, z \in \mathbb{C}$, si chiama *argomento di* z, e si indica con $\arg z$, l'angolo θ (con segno) che il raggio vettore forma con l'asse reale positivo. Se $z = a+jb$, indicando con ρ il modulo di z, risulta quindi:

$$z = a + jb = \rho(\cos\theta + j \sin\theta)$$

Le formule di passaggio sono quindi:

$$a = \rho \cos\theta$$
$$b = \rho \sin\theta$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\theta = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{se } a > 0, \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{se } a < 0, \\ \pi/2 & \text{se } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } a = 0, b < 0. \end{cases}$$

1.5 Formule di De Moivre.

Dati $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$, le formule di De Moivre danno una espressione particolarmente semplice del prodotto e del rapporto di tali due numeri ($s_1, s_2 \neq 0$). Esprimendo s_1 e s_2 in forma trigonometrica: $s_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)$, $s_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$, si ha

$$s_1 s_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$
$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

Tali formule possono essere iterate; in particolare possiamo ottenere l'espressione di una qualunque potenza di un dato numero complesso $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)], \qquad n \in \mathbb{N}.$$

A titolo di esercizio si verifichi che

$$\left(\sqrt{3} + j\right)^6 = -64.$$

1.6 Esponenziale in $\mathbb{C}$

Si chiama *esponenziale complesso* la funzione

$$e^s =_{\text{def}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + ... + \frac{s^i}{i!} + ...$$

Tale definizione è l'estensione al campo complesso dell'esponenziale reale, è definita per ogni numero complesso s e gode delle seguenti proprietà:

1. $e^{s+z} = e^s e^z$; in particolare:

2. $e^{x+jy} = e^x e^{jy}$. Ricordando gli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni (reali) seno e coseno si ha:

3. $e^{jy} = \cos y + j \sin y, \qquad e^{-jy} = \cos y - j \sin y$ da cui, mediante somma e sottrazione, si ottengono le ben note *formule di Eulero* ($y \in \mathbb{R}$)
$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j};$$
Pertanto
$$e^s = e^x \cos y \; + \; j \; e^x \sin y.$$
Di conseguenza:
$$|e^s| = e^x = e^{\mathrm{Re} s}, \ \mathrm{Arg}(e^s) = y = \mathrm{Im}(s),$$
$$\mathrm{Re}\, e^s = e^x \cos y = e^{\mathrm{Re}\, s} \cos \mathrm{Im}\, s,$$
$$\mathrm{Im}\, e^s = e^x \sin y = e^{\mathrm{Re}\, s} \sin \mathrm{Im}\, s$$

4. $e^s \neq 0$ per ogni $s \in \mathbb{C}$

5. $e^s = e^{s+2k\pi j}$, $k \in \mathbb{Z}$, i.e. e^s è una funzione periodica con periodo (complesso) $T = 2\pi j$.

1.7 Esercizi

ESERCIZIO 1 - Determinare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:
$$3j; -2;\ 1+j;\ \ -1-j;\ 1+j\sqrt{3};\ 3-j\sqrt{3};\ \ -j\sqrt{5};$$
$$(1+j)(1-j); (1+j\sqrt{3})(-1+j);\ \ -2+5j.$$

ESERCIZIO 2 - Utilizzando le formule di De Moivre, calcolare:
$$\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^8;\ \frac{(3+3j)^9}{j^6};\ \left(\frac{5j}{5+5j}\right)^9.$$

ESERCIZIO 3 - Sia
$$z_1 = e^{5j},\ z_2 = e^{1+\pi j}, z_3 = e^{-2\pi(j+4)}, z_4 = e^{j\pi/2} e^j,$$
$$z_5 = 1 + je^{j2\pi}, z_6 = e^j / e^{-3j}, z_7 = 5e^{-j}/e^j.$$

Per ciascun z_i, ($i = 1, .., 7$) calcolare Re z_i, Im z_i, $|z_i|$, Arg z_i.

2 Funzioni complesse : generalità

Posto $s = x + jy$ e $z = u + jv$ (dove x, y, u, v sono numeri reali e j indica l'unità immaginaria), sia $z = f(s)$ una funzione complessa. Tale funzione puo' essere interpretata come la trasformazione piana

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases},$$

dove $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$ prendono nome, rispettivamente, di *parte reale di* f e *parte immaginaria di* f.

Ad esempio la parte reale e la parte immaginaria della funzione

$$f(s) = s^2 + 1$$

sono date rispettivamente da

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 1, \qquad v(x, y) = 2xy.$$

Ad esempio si calcoli la parte reale e la parte immaginaria delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} f_1(s) &= 7js + s^2 \\ f_2(s) &= s + |s|^2 \\ f_3(s) &= (5j - 1)s \\ f_4(s) &= |s| - 5j \end{aligned}$$

3 Curva regolare in $\mathbb{C}$

Sia $[a, b]$ un intervallo **limitato e chiuso** della retta reale. Una *curva regolare* è una funzione $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = x(t) + jy(t)$$

dove le funzioni reali $x = x(t), y = y(t)$ sono funzioni derivabili con derivata continua nell'intervallo aperto (a, b) [i.e. $x, y \in C^1(a, b)$] e le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ non si annullano contemporaneamente in (a, b).

Tale concetto è del tutto analogo a quello visto nell'ambito dei corsi di Analisi Matematica, con la sola differenza che ora esso è formulato usando le notazioni complesse.

Se le due funzioni x, y sono di classe C^1 in tutto (a, b) eccetto un numero finito di punti e/o le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ si annullano contemporaneamente in un numero finito di punti, allora γ si dice *generalmente regolare*.

Geometricamente una curva regolare è rappresentata da una "linea" (detta *sostegno della curva*) avente tangente in ogni punto, salvo, al piu', gli estremi; una curva generalmente regolare è invece rappresentata da una "linea" che ammette tangente in ogni punto eccetto un numero finito di punti.

Esempio. La curva

$$\gamma(t) = \rho e^{jt} + s_0, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro s_0, raggio ρ e percorsa in senso antiorario. Infatti ponendo $\gamma(t) = x(t) + jy(t)$, $s_0 = x_0 + jy_0$ e utilizzando le formule di Eulero si ottiene

$$x(t) + jy(t) = \rho[\cos t + j \sin t] + x_0 + jy_0$$

da cui, uguagliando parte reale e parte immaginaria di ambo i membri, si ha

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho \cos t + x_0 \\ y(t) &= \rho \sin t + y_0 \end{aligned}$$

che, come è noto, è l'equazione in forma parametrica di una circonferenza di centro (x_0, y_0), raggio ρ e percorsa in senso antiorario (per $t \in [0, 2\pi]$).

Una curva γ si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva γ si dice *semplice* se presi $t_1, t_2 \in (a, b)$ con $t_1 \neq t_2$ risulta $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

4 Definizione di Integrale in $\mathbb{C}$

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare e sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione continua sulla curva. Si chiama *integrale di f esteso a γ* il numero complesso

$$\int_\gamma f(s)ds = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

5 Teorema di Cauchy

Sia H la funzione

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s}, \tag{2}$$

dove N e D sono polinomi primi tra loro e α è un numero complesso fissato. Utilizzando il Teorema di Cauchy, visto nel corso di Applicazioni di Matematica e al quale si rimanda, si ottiene il seguente:

Teorema *Sia* Γ *una curva regolare (o generalmente regolare) semplice e chiusa e percorsa in senso positivo (antiorario). Sia la funzione* H*, definita in (2), continua sulla curva* Γ *(ossia* $D(s) \neq 0$ *se* $s \in \Gamma$*). Siano poi* $s_1, s_2, ..s_N$ *gli zeri del polinomio* D ***interni*** *alla curva* Γ*. Allora*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma H(s)ds = Res[H, s_1] + Res[H, s_2] + ... + Res[H, s_N]$$

dove la scrittura $Res[H, s_i]$ *indica il Residuo di* H *in* s_i*.*

Il $Res[H, s_i]$ è stato definito nell'ambito del corso di Applicazioni di Matematica al quale si rimanda. Qui ricordiamo soltanto le formule per il calcolo di tale Residuo nel caso particolare considerato.

- **Se s_0 è una radice semplice di D, allora**

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s \to s_0} (s - s_0) \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s}.$$

- **Se s_0 è una radice doppia di D, allora**

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s \to s_0} \frac{d}{ds} \left[(s - s_0)^2 \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s} \right].$$

- **In generale, se s_0 è una radice di ordine $n > 1$ di D, allora**

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s \to s_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left[(s - s_0)^n \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s} \right].$$

Esercizio - Per le funzioni

$$f_1(s) = \frac{s^2-1}{s^2+1}; \qquad f_2(s) = \frac{7s^3+6}{s^2+5s+4}; \qquad f_3(s) = \frac{se^{5s}}{s^2-1}$$
$$f_4(s) = \frac{3se^{-2s}}{s^3+6s^2+5s}; \qquad f_5(s) = \frac{s}{(s+j)^2}; \qquad f_6(s) = \frac{e^s}{(s+1)^2}.$$

calcolare

$$\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma f_i(s)ds$$

dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2, percorsa in senso positivo (antiorario).