

ANALISI MATEMATICA III

(ELM+TEM)

A.A. 2012-2013

Prerequisiti

March 20, 2013

1 Richiami sui numeri complessi

1.1 Forma algebrica.

Un numero complesso z in forma algebrica è un numero del tipo

$$z = a + jb$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e j , detta *unità immaginaria*, gode della proprietà

$$j^2 = -1.$$

I numeri a e b sono detti, rispettivamente, *parte reale* e *parte immaginaria* di z e si indicano con

$$a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z.$$

L'insieme dei numeri complessi si indica con il simbolo $\mathbb{C}$. Poiché ogni numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali, esso può essere rappresentato come punto del piano. Per tale motivo l'insieme $\mathbb{C}$ è chiamato anche piano complesso. I numeri z per cui $b = 0$ sono in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$ e l'insieme di tali punti è chiamato *asse reale*. Analogamente, i numeri z per cui $a = 0$ chiamati *immaginari (puri)* e l'insieme da essi formato è detto *asse immaginario*.

L'insieme $\mathbb{C}$ è non ordinato, in quanto si può dimostrare che non è possibile definire in $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine che sia compatibile con quella definita in $\mathbb{R}$.

Dato $z = a + jb \in \mathbb{C}$, si chiama *coniugato di* z , e si indica con $\bar{z}$, il numero

$$\bar{z} = a - jb;$$

quindi, se z è rappresentato nel piano dal punto A , il coniugato di z è rappresentato nel piano complesso $\mathbb{C}$ dal punto simmetrico di A rispetto all'asse reale. Si chiama poi *modulo di* z , e si indica con $|z|$, il numero

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Valgono le seguenti relazioni tra $z, \bar{z}, |z|, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$:

$$z \bar{z} = |z|^2$$

$$\operatorname{Re} z = (z + \bar{z})/2$$

$$\operatorname{Im} z = (z - \bar{z})/2j.$$

1.2 Operazioni algebriche

Le operazioni algebriche in $\mathbb{C}$ seguono le ordinarie regole del calcolo algebrico, con l'avvertenza che $j^2 = -1$. Pertanto, posto $z = a + jb, s = c + jd$, si ha

$$z + s = (a + c) + (b + d)j$$

$$z - s = (a - c) + (b - d)j$$

$$zs = (ac - bd) + (bc + ad)j$$

$$\frac{z}{s} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}j \quad (\text{se } s \neq 0).$$

L'insieme $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, ossia ogni polinomio non costante ha almeno una radice in $\mathbb{C}$. Questa proprietà, nota sotto il nome di Teorema fondamentale dell'algebra o di D'Alembert, è una delle principali motivazioni dell'introduzione dell'insieme dei numeri complessi.

1.3 Norma e distanza in $\mathbb{C}$

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è uno spazio normato con norma data dal modulo, i.e. se $z = a + jb$ allora

$$||z|| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

Pertanto $\mathbb{C}$ è anche uno spazio metrico, dove la distanza $d(z, s)$ tra due numeri $z, s \in \mathbb{C}$ è data da

$$d(z, s) = ||z - s|| = |z - s|.$$

Si chiama *intorno* di un punto z_0 in $\mathbb{C}$ di raggio δ l'insieme

$$I_\delta(z_0) = \{z : |z - z_0| < \delta\}.$$

Geometricamente $I_\delta(z_0)$ è l'interno di una circonferenza di centro z_0 e raggio δ .

Così, ad esempio,

$$|z - 3 + 2j| < 1, \quad (1)$$

avendosi

$$|z - 3 + 2j| = |z - (3 - 2j)|$$

(1) rappresenta l'interno di una circonferenza di centro $z_0 = 3 - 2j$ e raggio 1, mentre

$$|z + j| > 5$$

rappresenta l'esterno di una circonferenza di centro $-j$ e raggio 5.

1.4 Forma trigonometrica di un numero complesso.

Dato $z \neq 0, z \in \mathbb{C}$, si chiama *argomento* di z , e si indica con $\arg z$, l'angolo θ (con segno) che il raggio vettore forma con l'asse reale positivo. Se $z = a + jb$, indicando con ρ il modulo di z , risulta quindi:

$$z = a + jb = \rho(\cos \theta + j \sin \theta)$$

Le formule di passaggio sono quindi:

$$a = \rho \cos \theta$$

$$b = \rho \sin \theta$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{se } a > 0, \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{se } a < 0, \\ \pi/2 & \text{se } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } a = 0, b < 0. \end{cases}$$

1.5 Formule di De Moivre.

Dati $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$, le formule di De Moivre danno una espressione particolarmente semplice del prodotto e del rapporto di tali due numeri ($s_1, s_2 \neq 0$). Esprimendo s_1 e s_2 in forma trigonometrica: $s_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)$, $s_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)$, si ha

$$\begin{aligned}s_1 s_2 &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ \frac{s_1}{s_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2)].\end{aligned}$$

Tali formule possono essere iterate; in particolare possiamo ottenere l'espressione di una qualunque potenza di un dato numero complesso $z = \rho(\cos \theta + j \sin \theta)$

$$z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)], \quad n \in \mathbb{N}.$$

A titolo di esercizio si verifichi che

$$(\sqrt{3} + j)^6 = -64.$$

1.6 Radici in campo complesso e risoluzione di equazioni algebriche.

Determinare le radici n -esime di un dato numero complesso $s_0 \neq 0$ significa risolvere l'equazione $z^n = s_0$. Utilizzando la forma trigonometrica $s_0 = \rho_0(\cos \theta_0 + j \sin \theta_0)$, $z = \rho(\cos \theta + j \sin \theta)$ (ρ_0, θ_0 dati del problema, ρ, θ incognite), mediante l'utilizzo delle formule di De Moivre si ottiene

$$\rho^n = \rho_0, \quad n\theta = \theta_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Infatti due numeri complessi coincidono se e solo se hanno uguale modulo e argomento che differisce per multipli di 2π . Essendo ρ_0 reale positivo, la prima equazione ha come unica soluzione $\rho = \sqrt[n]{\rho_0}$ (radice reale). Dalla seconda: $\theta = \theta_0/n + 2k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$; si osserva che soltanto per $k = 0, 1, \dots, n-1$ risulta $\theta \in [0, 2\pi)$. Pertanto le radici n -esime di s_0 sono date da:

$$\sqrt[n]{s_0} = \sqrt[n]{\rho_0} \left[\cos \left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \right) + j \sin \left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

dove $\rho_0 = |s_0|$, $\theta_0 = \text{Arg}(s_0)$.

Pertanto:

- **Le radici distinte sono esattamente n .**
- **Tali radici hanno tutte lo stesso modulo** e quindi si trovano su una medesima circonferenza, di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho_0}$.
- **Tali radici sono i vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto in tale circonferenza.** Quindi tali radici differiscono tra loro per una rotazione di un multiplo di $2\pi/n$.

La radice n -esima in $\mathbb{C}$ quindi *non* è una funzione, ma una applicazione a più valori. Ad esempio la radice quadrata in $\mathbb{C}$ restituisce due valori (opposti) ($\sqrt{-4} = \pm 2j$).

1.7 Esponenziale in $\mathbb{C}$

Si chiama *esponenziale complesso* la funzione

$$e^s \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \dots + \frac{s^i}{i!} + \dots$$

Tale definizione è l'estensione al campo complesso dell'esponenziale reale, è definita per ogni numero complesso s e gode delle seguenti proprietà:

1. $e^{s+z} = e^s e^z$; in particolare:
2. $e^{x+jy} = e^x e^{jy}$. Ricordando gli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni (reali) seno e coseno si ha:
3. $e^{jy} = \cos y + j \sin y$, $e^{-jy} = \cos y - j \sin y$ da cui, mediante somma e sottrazione, si ottengono le ben note *formule di Eulero* ($y \in \mathbb{R}$)

$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j};$$

Pertanto

$$e^s = e^x \cos y + j e^x \sin y.$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned} |e^s| &= e^x = e^{\text{Re } s}, \quad \text{Arg}(e^s) = y = \text{Im}(s), \\ \text{Re } e^s &= e^x \cos y = e^{\text{Re } s} \cos \text{Im } s, \\ \text{Im } e^s &= e^x \sin y = e^{\text{Re } s} \sin \text{Im } s \end{aligned}$$

4. $e^s \neq 0$ per ogni $s \in \mathbb{C}$
5. $e^s = e^{s+2k\pi j}$, $k \in \mathbb{Z}$, i.e. e^s è una funzione periodica con periodo (complesso) $T = 2\pi j$.

1.8 Equazioni esponenziali in $\mathbb{C}$.

Sia s_0 un numero complesso, $s_0 \neq 0$. Scrivendo tale numero in forma trigonometrica si ottiene $s_0 = \rho_0(\cos \theta_0 + j \sin \theta_0)$, con $\rho_0 \neq 0$. Ciò posto, si consideri l'equazione

$$e^z = s_0.$$

Ponendo $z = x + jy$ tale equazione allora diviene:

$$e^x(\cos y + j \sin y) = \rho_0(\cos \theta_0 + j \sin \theta_0),$$

da cui

$$x = \log \rho_0, \quad y = \theta_0 + 2k\pi j, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Otteniamo quindi infinite soluzioni date da:

$$z = x + jy = \log |s_0| + j(\text{Arg}(s_0) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Tutte tali soluzioni hanno tutte la stessa parte reale (il logaritmo in $\mathbb{R}$ del modulo di s_0) e differiscono nella parte immaginaria per multipli di 2π .

1.9 Esercizi

ESERCIZIO 1 - Determinare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:

$$3j; -2; 1+j; -1-j; 1+j\sqrt{3}; 3-j\sqrt{3}; -j\sqrt{5}; \\ (1+j)(1-j); (1+j\sqrt{3})(-1+j); -2+5j.$$

ESERCIZIO 2 - Utilizzando le formule di De Moivre, calcolare:

$$\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^8; \frac{(3+3j)^9}{j^6}; \left(\frac{5j}{5+5j}\right)^9.$$

ESERCIZIO 3 - Sia

$$z_1 = e^{5j}, z_2 = e^{1+\pi j}, z_3 = e^{-2\pi(j+4)}, z_4 = e^{j\pi/2}e^j, \\ z_5 = 1 + je^{j2\pi}, z_6 = e^j/e^{-3j}, z_7 = 5e^{-j}/e^j.$$

Per ciascun z_i , ($i = 1, \dots, 7$) calcolare $\operatorname{Re} z_i$, $\operatorname{Im} z_i$, $|z_i|$, $\operatorname{Arg} z_i$.

ESERCIZIO 4 - Risolvere le seguenti equazioni in $\mathbb{C}$.

$$e^s = j; e^{-s} = -1; e^{2s} = 1 + j; e^{1/s} + j = 0; \\ s^2 + js = 0; s^2 + s + j = 0; s^5 + 9 = 0 \\ s^4 + js = 0; s^3 + 1 = j; s^4 + 6s^2 + 8 = 0.$$

2 Richiami sulle Funzioni complesse

2.1 Generalità

Posto $s = x + jy$ e $z = u + jv$ (dove x, y, u, v sono numeri reali e j indica l'unità immaginaria), sia $z = f(s)$ una funzione complessa. Tale funzione può essere interpretata come la trasformazione piana

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases},$$

dove $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$ prendono nome, rispettivamente, di *parte reale di f* e *parte immaginaria di f* .

Ad esempio la parte reale e la parte immaginaria della funzione

$$f(s) = s^2 + 1$$

sono date rispettivamente da

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 1, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Ad esempio si calcoli la parte reale e la parte immaginaria delle seguenti funzioni

$$f_1(s) = 7js + s^2 \\ f_2(s) = s + |s|^2 \\ f_3(s) = (5j - 1)s \\ f_4(s) = |s| - 5j$$

2.2 Curva regolare in $\mathbb{C}$

Sia $[a, b]$ un intervallo **limitato e chiuso** della retta reale. Una *curva regolare* è una funzione $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = x(t) + jy(t)$$

dove le funzioni reali $x = x(t), y = y(t)$ sono funzioni derivabili con derivata continua nell'intervallo aperto (a, b) [i.e. $x, y \in C^1(a, b)$] e le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ non si annullano contemporaneamente in (a, b) .

Tale concetto è del tutto analogo a quello visto nell'ambito dei corsi di Analisi Matematica, con la sola differenza che ora esso è formulato usando le notazioni complesse.

Se le due funzioni x, y sono di classe C^1 in tutto (a, b) eccetto un numero finito di punti e/o le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ si annullano contemporaneamente in un numero finito di punti, allora γ si dice *generalmente regolare*.

Geometricamente una curva regolare è rappresentata da una "linea" (detta *sostegno della curva*) avente tangente in ogni punto, salvo, al più, gli estremi; una curva generalmente regolare è invece rappresentata da una "linea" che ammette tangente in ogni punto eccetto un numero finito di punti.

Esempio. La curva

$$\gamma(t) = \rho e^{jt} + s_0, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro s_0 , raggio ρ e percorsa in senso antiorario. Infatti ponendo $\gamma(t) = x(t) + jy(t)$, $s_0 = x_0 + jy_0$ e utilizzando le formule di Eulero si ottiene

$$x(t) + jy(t) = \rho[\cos t + j \sin t] + x_0 + jy_0$$

da cui, uguagliando parte reale e parte immaginaria di ambo i membri, si ha

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho \cos t + x_0 \\ y(t) &= \rho \sin t + y_0 \end{aligned}$$

che, come è noto, è l'equazione in forma parametrica di una circonferenza di centro (x_0, y_0) , raggio ρ e percorsa in senso antiorario (per $t \in [0, 2\pi]$).

Una curva γ si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva γ si dice *semplice* se presi $t_1, t_2 \in (a, b)$ con $t_1 \neq t_2$ risulta $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

2.3 Definizione di Integrale in $\mathbb{C}$

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare e sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua sulla curva. Si chiama *integrale di f esteso a γ* il numero complesso

$$\int_{\gamma} f(s)ds = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

2.4 Teorema di Cauchy

Sia H la funzione

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}e^{\alpha s}, \quad (3)$$

dove N e D sono polinomi primi tra loro e α è un numero complesso fissato. Utilizzando il Teorema di Cauchy, visto nel corso di Applicazioni di Matematica e al quale si rimanda, si ottiene il seguente:

Teorema *Sia Γ una curva regolare (o generalmente regolare) semplice e chiusa e percorsa in senso positivo (antiorario). Sia la funzione H , definita in (3), continua sulla curva Γ (ossia $D(s) \neq 0$ se $s \in \Gamma$). Siano poi $s_1, s_2, \dots, s_N$ gli zeri del polinomio D **interni** alla curva Γ . Allora*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} H(s)ds = \text{Res}[H, s_1] + \text{Res}[H, s_2] + \dots + \text{Res}[H, s_N]$$

dove la scrittura $\text{Res}[H, s_i]$ indica il Residuo di H in s_i .

Il $\text{Res}[H, s_i]$ è stato definito nell'ambito del corso di Applicazioni di Matematica al quale si rimanda. Qui ricordiamo soltanto le formule per il calcolo di tale Residuo nel caso particolare considerato.

- Se s_0 è una radice semplice di D , allora

$$\text{Res}[H(s), s_0] = \lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0) \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s}.$$

- Se s_0 è una radice doppia di D , allora

$$\text{Res}[H(s), s_0] = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{d}{ds} \left[(s - s_0)^2 \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s} \right].$$

- In generale, se s_0 è una radice di ordine $n > 1$ di D , allora

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left[(s - s_0)^n \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s} \right].$$

Esercizio - Per le funzioni

$$\begin{aligned} f_1(s) &= \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}; & f_2(s) &= \frac{7s^3 + 6}{s^2 + 5s + 4}; & f_3(s) &= \frac{se^{5s}}{s^2 - 1} \\ f_4(s) &= \frac{3se^{-2s}}{s^3 + 6s^2 + 5s}; & f_5(s) &= \frac{s}{(s + j)^2}; & f_6(s) &= \frac{e^s}{(s + 1)^2}. \end{aligned}$$

calcolare

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} f_i(s) ds$$

dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2, percorsa in senso positivo (antiorario).