n. **1** Matricola: **0000000**

Nome: —— ——

Esercizio 1

Sia

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{(\cos^2 x - 2)\sin^2 x}.$$

Calcolare l'integrale $\int f(x)\,dx$.
È possibile determinare una primitiva F di f tale che $F(0) = 0$? Giustificare la risposta.

Esercizio 2

Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+x^2} - 1} \right)^\alpha dx$$

assume valore finito.
NOTA: Non è richiesto il calcolo del valore dell'integrale!

Esercizio 3.1 - Solo per a.a. 2011-12.

Siano date le equazioni differenziali

$$A) \quad y'' + 2y' - 3y = 2\cos x, \qquad B) \quad y'' + 2y' - 3y = 3e^{-3x}.$$

a) Determinare l'integrale generale di A) e di B);
b) per l'equazione A) determinare la soluzione del problema di Cauchy $y(0) = 3/5$, $y'(0) = -1/5$;
c) per l'equazione A) determinare, se esistono, soluzioni soddisfacenti $y(0) = y'(0)$;
d) per l'equazione B) determinare, se esistono, soluzioni che tendono a zero per $x \to +\infty$.

Esercizio 3.2 - Solo per a.a. 2010-11 e precedenti.

Sia Σ la superficie data da $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, dove

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ -1 \le z \le 0\},$$
$$\Sigma_2 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 4(z-1)^2,\ 0 \le z \le 1\},$$

e sia dato il campo vettoriale

$$V = (xz + y^2, 2y + xz^2, z + xy).$$

a) Utilizzando il teorema della divergenza, calcolare il flusso di V uscente da Σ;
b) utilizzando il teorema del rotore, calcolare il flusso di rot$V$ uscente da Σ.

Esercizio 4

Calcolare il centro di massa di una lamina piana D, descritta da

$$D = \{(x,y) :\ -1 \le y \le 1, y^2 \le x \le 1\}$$

e avente densità superficiale $\rho(x,y) = \sqrt{x}$.

n. **2** Matricola: **0000000**

Nome: —— ——

Esercizio 1

Sia

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{(\sin^2 x - 2)\cos^2 x}.$$

Calcolare l'integrale $\int f(x)\,dx$.
È possibile determinare una primitiva F di f tale che $F(\pi/2) = 0$? Giustificare la risposta.

Esercizio 2

Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - e^{-\frac{1}{x^2}}} \right)^\alpha dx$$

assume valore finito.
NOTA: Non è richiesto il calcolo del valore dell'integrale!

Esercizio 3.1 - Solo per a.a. 2011-12.

Siano date le equazioni differenziali

$$A) \quad y'' + y' - 2y = 3\cos x, \qquad B) \quad y'' + y' - 2y = 2e^{-2x}.$$

a) Determinare l'integrale generale di A) e di B);
b) per l'equazione A) determinare la soluzione del problema di Cauchy $y(0) = 1/10$, $y'(0) = -1/5$;
c) per l'equazione A) determinare, se esistono, soluzioni soddisfacenti $y(0) = y'(0)$;
d) per l'equazione B) determinare, se esistono, soluzioni che tendono a zero per $x \to +\infty$.

Esercizio 3.2 - Solo per a.a. 2010-11 e precedenti.

Sia Σ la superficie data da $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, dove

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ 0 \le z \le 1\},$$
$$\Sigma_2 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 4(z+1)^2,\ -1 \le z \le 0\},$$

e sia dato il campo vettoriale

$$V = (xz + y^2, 2y + xz^2, z + xy).$$

a) Utilizzando il teorema della divergenza, calcolare il flusso di V uscente da Σ;
b) utilizzando il teorema del rotore, calcolare il flusso di $\mathrm{rot}V$ uscente da Σ.

Esercizio 4

Calcolare il centro di massa di una lamina piana D, descritta da

$$D = \{(x,y) :\ -1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\}$$

e avente densità superficiale $\rho(x,y) = \sqrt{y}$.