n. **1** Matricola: ———

Nome: “

Svolgere completamente almeno uno tra gli esercizi 1 e 2 ed almeno uno tra gli esercizi 3 e 4. Giustificare le affermazioni e il procedimento seguito

Esercizio 1

Siano
$$g(x) = \cosh(ax) - e^{1-\cos x} \qquad \text{e} \qquad h(x) = 1 + \sin x - e^{ax}.$$

a) Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{h(x)}$$
precisando l'eventuale ordine di infinito o infinitesimo del rapporto quando $x \to 0$;

b) Calcolare, per $x = 0$, il valore di
$$\frac{d^6}{dx^6}(g(x) + h(x)).$$

Esercizio 2

a) Determinare i valori dei parametri positivi a e b in modo tale che il minimo assoluto della funzione
$$f(x) = \int_{-1}^{x} (b - |t|)e^{at}\, dt$$
sia raggiunto per $x = 1$ e si trovi sull'asintoto orizzontale della funzione stessa.

b) Studiare la funzione così ottenuta.

Esercizio 3

a) Determinare tutti i possibili valori dei parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ affinché il seguente campo sia conservativo in $\{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$:
$$\underline{F}(x, y, z) = \left(\ln(z + y) + 3z + \frac{5y}{x^2}, \frac{x}{z+y} - 2z^2 - \frac{a}{x}, \frac{x}{z+y} + bzy + 3x + c \right).$$

b) Per tale scelta dei parametri, calcolare il lavoro del campo lungo la semicirconferenza contenuta nel piano $y = 1$ di equazione $(x-2)^2 + (z-2)^2 = 1$, $x \geq 2$ e percorsa in senso antiorario. Esiste una scelta dei parametri per cui tale lavoro sia pari a $2\ln 2$?

Esercizio 4

Calcolare le coordinate del centro di massa dell'insieme piano D descritto da
$$D = \{(x, y) : x \leq 4 - |y|, (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$$
supponendo abbia densità costante. Detta poi γ la frontiera di D percorsa in senso positivo, dedurre il valore dell'integrale
$$\int_\gamma yx\, dx.$$

n. **2** Matricola: ———-

Nome: “

Svolgere completamente almeno uno tra gli esercizi 1 e 2 ed almeno uno tra gli esercizi 3 e 4. Giustificare le affermazioni e il procedimento seguito

Esercizio 1

Siano

$$g(x) = \cosh(ax) - e^{1-\cos x} \qquad \text{e} \qquad h(x) = 1 + \sin x - e^{ax}.$$

a) Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)}{g(x)}$$

precisando l'eventuale ordine di infinito o infinitesimo del rapporto quando $x \to 0$;

b Calcolare, per $x = 0$, il valore di

$$\frac{d^6}{dx^6}(g(x) - h(x)).$$

Esercizio 2

a) Determinare i valori dei parametri positivi a e b in modo tale che il minimo assoluto della funzione

$$f(x) = \int_1^x (a - |t|)e^{-bt}\, dt$$

sia raggiunto per $x = -1$ e si trovi sull'asintoto orizzontale della funzione stessa.

a) Studiare la funzione così ottenuta.

Esercizio 3

a) Determinare tutti i possibili valori dei parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ affinché il seguente campo sia conservativo in $\{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$:

$$\underline{F}(x, y, z) = \left(\frac{z}{x+y} + axy + 2z - b,\ \frac{z}{x+y} - 3x^2 - \frac{c}{z},\ \ln(x+y) + 2x + \frac{5y}{z^2} \right).$$

b) Per tale scelta dei parametri, calcolare il lavoro del campo lungo la semicirconferenza contenuta nel piano $z = 1$ di equazione $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$, $y \geq 2$ e percorsa in senso orario. Esiste una scelta dei parametri per cui tale lavoro sia pari a $\ln(5/3)$?

Esercizio 4

Calcolare le coordinate del centro di massa dell'insieme piano D descritto da

$$D = \{(x, y) : x \geq |y|, (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$$

supponendo abbia densità costante. Detta poi γ la frontiera di D percorsa in senso positivo, dedurre il valore dell'integrale

$$\int_\gamma yx\, dx.$$