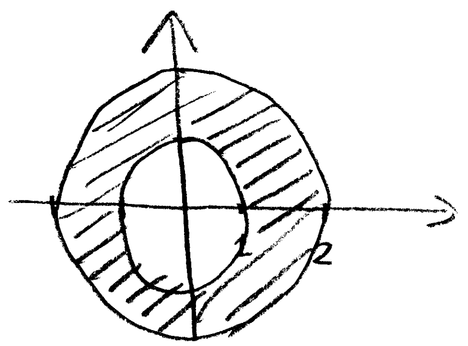
③ FILA A

$$\iint_A (2x - |xy|)\,dx\,dy, \quad A = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$$



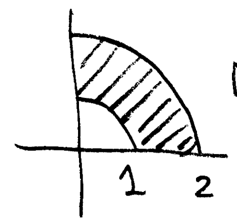
$f_1(x,y) = 2x$ dispari rispetto alla simmetria $S_1(x,y) = (-x,y)$ e A è simmetrico rispetto a tale simmetria, dunque

$$\iint_A 2x\,dx\,dy = 0$$

$f_2(x,y) = |xy|$ è pari rispetto alla simetria S_1 e anche rispetto alla simmetria $S_2(x,y) = (x,-y)$; dunque

$$-\iint_A |xy|\,dx\,dy = -4\iint_D xy\,dx\,dy$$

dove $D = \{(x,y) \in A : x \ge 0, y \ge 0\}$



Passando a coordinate polari il dominio di integrazione diviene:

$E = \{(\rho,\theta) : 1 \le \rho \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi/2\}$, da cui:

$$-\iint_A |xy|\,dx\,dy = -4\int_1^2\int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin\theta\cos\theta\,\rho\,d\theta\,d\rho =$$

$$= -4\int_1^2 \rho^3\,d\rho \cdot \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,d\theta = -2\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 \left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{16-1}{4}(-1-1) = \boxed{-\frac{15}{2}}$$

FILA B

$$\iint_A \left(|xy| - y\right) dx\,dy, \qquad A = \{(x,y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 9\}$$

Analogo allo svolgimento per la fila A:

$\iint_A -y\,dx\,dy = 0$ perché $f_1(x,y) = -y$ è dispari rispetto a $S(x,y) = (x, -y)$.

$$\iint_A |xy|\,dx\,dy = \overset{2}{\cancel{4}}\left(\frac{\rho^4}{4}\right)_1^3 \left(-\frac{\cos 2\theta}{\cancel{2}}\right)_0^{\pi/2} = \frac{81-1}{4} \cdot 2 = 40$$