Esercizi su Campi vettoriali e lavoro

⋆ Campi conservativi e potenziale

1. Calcolare rotore e divergenza del campo

$$\underline{F}(x,y,z) = (xy, y^2 - z^2, yz).$$

   Il campo è conservativo?

   Risposte: rot$\underline{F} = (3z, 0, -x)$, div$\underline{F} = 4y$, non è conservativo essendo rot$\underline{F} \not\equiv 0$

2. Dato il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = 3x^2y\,\underline{i} + x^3\,\underline{j} - \frac{1}{z}\,\underline{k},$$

   definito nel dominio $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, verificare che è conservativo. Determinare poi il potenziale $U(x,y,z)$ mediante integrazione diretta delle componenti di $\underline{F}$ e mediante il calcolo del lavoro da un punto del dominio E al punto (x,y,z) lungo una spezzata parallela agli assi coordinati.

   Risposta: $U(x,y,z) = x^3y - \ln z + c$, $c \in \mathbb{R}$

3. Mostrare che il campo

$$\underline{F}(x,y,z) = (x+z)\,\underline{i} - (y+z)\,\underline{j} + (x-y)\,\underline{k}$$

   è conservativo in R^3 e calcolare il potenziale $U(x,y,z)$. Calcolare infine il lavoro del campo $\underline{F}$ lungo il segmento che congiunge $(0,0,0)$ con $(2,2,1)$, percorso nel senso delle x crescenti.

   Risposte: $U(x,y,z) = x^2/2 - y^2/2 + xz - yz + c$, $L_\gamma(\underline{F}) = 0$

4. Dire per quali valori del parametro reale α il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = (\alpha xz + \frac{yz}{x})\,\underline{i} + (z\ln x - \frac{\alpha^2 y}{2}\ln z)\,\underline{j} + (x^\alpha + y\ln x - \frac{y^2}{z})\,\underline{k}$$

   è conservativo in $E = \{(x,y,z) \in R^3 : x > 0, z > 0\}$. Per i valori α determinati, calcolare il potenziale di $\underline{F}$ che si annulla in $(1,1,1)$.

   Risposte: $\alpha = 2$, $U(x,y,z) = x^2z + yz\ln x - y^2\ln z - 1$

⋆ Lavoro

1. Calcolare il lavoro del campo

$$\underline{F}(x,y) = -y\ \underline{i} + x\ \underline{j}$$

   i) lungo la circonferenza di raggio 1 e centro l'origine, percorsa in senso orario.
   ii) lungo l'arco di spirale $\rho = \theta$, con $\theta \in [0, 2\pi]$.
   Il campo è conservativo?

   Risposte: i) $L_\gamma(\underline{F}) = -2\pi$ ii) $L_\gamma(\underline{F}) = 8\pi^3/3$ iii) No, per i)

2. Calcolare
$$I = \int_\gamma (x^2 + xy)\, dx + \frac{x^2}{2}\, dy$$
   dove γ è l'arco di parabola $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, percorsa nel senso delle x crescenti.
   Il campo vettoriale associato è conservativo? Quanto vale il lavoro del campo lungo la curva $\underline{r}(t) = (t^5, t\, e^{t \sin(\pi t)})$, $0 \le t \le 1$?

   Risposte: $I = 5/6$, il campo è conservativo, $L = 5/6$ perché non dipende dalla curva

3. Calcolare il lavoro lungo γ del campo

$$\underline{F}(x,y) = \cos x\, \underline{i} - y\, \underline{j}$$

   dove γ è la curva $y = \sin x$ per $x \in [0, \pi/2]$.

   Risposta: $1/2$

4. Calcolare il lavoro del campo

$$\underline{F}(x,y) = y\, \underline{i} + x^2\, \underline{j}$$

   lungo la frontiera ∂S dell'insieme

$$S = \{(x,y) \in R^2 : x^2 - 1 \le y \le \sqrt{1 - x^2},\ y \le x + 1\},$$

   percorsa in verso orario.

   Risposta: $\pi/4 + 3/2$

⋆ Applicazioni del teorema di Gauss-Green nel piano

1. Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\partial D} (x - y^3)\, dx + (y^3 + x^3)\, dy$$

dove ∂D è la frontiera, percorsa in senso antiorario, del quarto di disco di centro l'origine e raggio 2 contenuto nel primo quadrante.

Risposta: 6π

2. Calcolare l'area racchiusa dall'astroide di equazione

$$r(t) = ((\cos t)^3, (\sin t)^3), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Risposta: $3\pi/8$

3. Calcolare

$$\iint_{\Omega} x^2\, dxdy$$

dove

$$\Omega = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\},$$

trasformando l'integrale doppio in integrale di linea di seconda specie mediante il teorema di Gauss-Green.

Risposta: $3\pi/4$

4. Sia Ω la lamina omogenea (densità costante ϱ) delimitata dalla cicloide di equazione

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

e dall'asse delle x. Calcolare le coordinate del baricentro utilizzando il teorema di Gauss Green.

Risposta: $x_G = \pi$, $y_G = 5/6$