Esercizi su Curve Parametriche

1. Dimostrare che la spirale di Archimede, espressa in forma polare da $\rho = A\theta$, $A > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, è una curva regolare.

   Risposta: $|\mathbf{r}'(t)|^2 = A^2(1+\theta^2) > 0$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}$

2. Determinare la retta tangente alla curva

   $$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1)), \quad t \in \mathbb{R}$$

   nel punto $\mathbf{r}(1)$.

   Risposta: $x = y$

3. Determinare la retta tangente all'astroide di equazione

   $$\mathbf{r}(t) = ((\cos t)^3, (\sin t)^3), \quad t \in [0, 2\pi]$$

   nel suo punto $P = (\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4)$.

   Risposta: $y = -x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4. Determinare le rette tangenti all'elica cilindrica di equazione

   $$\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, At), \quad t \in [0, 4\pi],\ A, R > 0$$

   nei punti corrispondenti ai valori $t = \pi/4, t = \pi$.

   Risposte: $\begin{cases} 2x = R\sqrt{2} - \lambda R\sqrt{2} \\ 2y = R\sqrt{2} + \lambda R\sqrt{2} \\ z = A\pi/4 + \lambda A \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -R \\ y = -R\lambda \\ z = A\pi + \lambda A \end{cases}$

5. Determinare il parametro arco per la curva

   $$\mathbf{r}(t) = (e^{2t}, 2e^t, t) \quad t \in [0, 1]$$

   e calcolare la lunghezza di tale curva.

   Risposte: a) $s(t) = e^{2t} + t - 1$, b) $L = e^2$

6. Calcolare

$$\int_\gamma f(x,y,z)ds$$

dove $f(x,y,z) = \sqrt{2y^2+z^2}$ e γ è l'intersezione fra la sfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ e il piano $x = y$.

Risposta: 8π

7. Calcolare

$$\int_\gamma \left(x^2+y^2\right) ds$$

essendo γ la curva di equazione polare

$$\rho = 2e^{2\theta}, \qquad\qquad \theta \in (-\infty, 0]$$

Risposta: $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

8. Un filo omogeneo, di densità lineare ρ costante, è disposto lungo la curva di equazione

$$\mathbf{r}(t) = a(\cos t + \sin t)\mathbf{i} + a(\sin t - \cos t)\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 2\pi], \qquad a > 0$$

Calcolare il momento di inerzia I rispetto all'asse z.

Risposta: $4\pi\sqrt{2}\,\rho\,a^3$

9. Sia dato un filo materiale, omogeneo, disposto come una semicirconferenza di raggio a. Provare che il centro di massa sta sull'asse di simmetria, a distanza $2a/\pi$ dal centro, e che il momento d'inerzia rispetto al diametro congiungente gli estremi è $(Ma^2)/2$, dove M è la massa del filo.

10. Un filo materiale è disposto lungo la circonferenza $x^2 + y^2 = R^2$, e ha densità lineare $\rho(x,y) = |x| + |y|$. Se ne determini: a) la massa, b) il momento d'inerzia rispetto ad un diametro. Il momento d'inerzia dipende dal diametro scelto? c) Ripetere l'esercizio assumendo che la densità lineare della curva sia data da $\rho(x,y) = |x+y|$.

Risposte: a) $M = 8R^2$ b) $I = 4R^4$ c) $M = 4R^2\sqrt{2}$, $I = 2R^4\sqrt{2}$

11. Sia $\mathbf{r}$ la curva

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t\cos(3t), \cos t, \sin t\sin(3t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Stabilire se essa è regolare, semplice, chiusa. Provare che il suo sostegno è contenuto nella sfera di centro l'origine e raggio 1. Trovare infine i punti sul sostegno della curva in cui la retta tangente è contenuta in un piano parallelo al piano $z = 0$.

Risposte: a) La curva è regolare e chiusa, ma non è semplice. b) $P_1 = \mathbf{r}(\pi/2) = \mathbf{r}(3\pi/2) = (0, 0, -1)$, $P_2 = \mathbf{r}(\pi) = (0, -1, 0)$, $P_3 = \mathbf{r}(\alpha)$, $P_4 = \mathbf{r}(\pi - \alpha)$, $P_5 = \mathbf{r}(\pi + \alpha)$, $P_6 = \mathbf{r}(2\pi - \alpha)$, dove $\alpha = \arcsin(\sqrt{6}/4) = \arccos(\sqrt{10}/4) = \arctan(3/5)$