Esercizi su Equazioni Differenziali

1. a) Determinare l'integrale generale dell'equazione
$$yy' = 1.$$
b) Risolvere quindi il problema di Cauchy con dato iniziale $y(0) = 2$, determinando il dominio della soluzione.

   Risposte:
   a) $y(x) = \sqrt{2x + c}$, $x > -c/2$ e $y(x) = -\sqrt{2x + c}$, $x > -c/2$, $c \in \mathbb{R}$.
   b) $y(x) = \sqrt{2x + 4}$, $x > -2$

2. a) Determinare l'integrale generale dell'equazione
$$xy' + y = 0.$$
b) Risolvere quindi il problema di Cauchy con dato iniziale $y(-1) = 2$, determinando il dominio della soluzione.

   Risposte:
   a) $y(x) = \dfrac{c}{x}$, $x > 0$ e $y(x) = \dfrac{c}{x}$, $x < 0$, $c \in \mathbb{R}$
   b) $y(x) = -\dfrac{2}{x}$, $x < 0$

3. Risolvere i tre problemi di Cauchy dati dall'equazione
$$y' = 2y(1 - y)$$
con condizione iniziale $y(0) = 2$, $y(0) = 1/2$, $y(0) = -2$ rispettivamente.

   Risposte:
   a) $y(x) = \dfrac{2e^{2x}}{2e^{2x} - 1}$, $x > -\dfrac{1}{2}\ln 2$
   b) $y(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$, $x \in \mathbb{R}$
   c) $y(x) = \dfrac{2e^{2x}}{2e^{2x} - 3}$, $x < \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$

4. Mediante il cambiamento di variabile: $z = y/x$, determinare l'integrale generale dell'equazione (riconducibile ad una a variabili separabili)

$$y' = \frac{x+y}{x}.$$

(*Si osservi che* $y = xz$ *e dunque* $y' = xz' + z$)

Risposta:
$y(x) = x \ln x + cx$, $x > 0$ e $y(x) = x \ln(-x) + cx$, $x < 0$, $c \in \mathbb{R}$

5. a) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

b) Determinare inoltre la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $y(-1) = 2$, specificandone il dominio.

Risposte:
a) $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}$, $x > 0$ e $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}$, $x < 0$, $c \in \mathbb{R}$
b) $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}$, $x < 0$

6. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = 0 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Risposta: $y(x) = e^{-x}(\cos(\sqrt{2}x) + \frac{3}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}x))$

7. Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 2y' + 3y = t + e^t$$

Risposta: $y(t) = e^{-t}(c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t)) + \frac{t}{3} - \frac{2}{9} + \frac{e^t}{6}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

8. Per l'equazione al punto precedente determinare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Risposta: $y(t) = e^{-t}(\frac{1}{18} \cos(\sqrt{2}t) + \frac{5\sqrt{2}}{18} \sin(\sqrt{2}t)) + \frac{t}{3} - \frac{2}{9} + \frac{e^t}{6}$

9. Per l'equazione all'esercizio 6, esistono soluzioni che soddisfano le condizioni $y(0) = y(1)$? E soluzioni che soddisfano $y(0) = y(1) = 0$?

Risposte: a) infinite soluzioni
b) solo $y(t) \equiv 0$

10. Determinare se esistono soluzioni dell'equazione

$$y'' - y' - 6y = e^{-t}$$

che soddisfano le condizioni

$$\begin{aligned} &(i) && \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0 \\ &(ii) && \lim_{t\to+\infty} y(t) = 1 \\ &(iii) && \lim_{t\to-\infty} y(t) = 0 \\ &(iv) && y(0) = 0, \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0. \end{aligned}$$

In caso di risposta affermativa, specificare quante sono tali soluzioni.

Risposte: i) infinite soluzioni ii) nessuna soluzione
iii) nessuna soluzione iv) unica soluzione: $y(t) = (e^{-2t} - e^{-t})/4$

11. Determinare l'integrale generale dell'equazione del secondo ordine non lineare

$$y^{''} - (y^{'})^2 = 1$$

(*Si usi la sostituzione* $w = y'$)

Risposta: $y(x) = -\ln(\cos(x + c)) + k$, $x \in (-\pi/2 - c, \pi/2 - c)$, con $c, k \in \mathbb{R}$

12. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{'} = \dfrac{y^2 - 1}{x^2 - 1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Risposta: $y(x) = x$, $-1 < x < 1$

13. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} e^{x+y}y^{'} + x = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e determinare il dominio della soluzione.

Risposta: $y(x) = -x + \ln(x + 1)$, $x > -1$

14. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y \sin t = (1 + \cos t) \sin t \\ y(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

Risposta: $y(t) = 2 + \cos t - 2e^{\cos t}$, $t \in \mathbb{R}$

15. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = e^{-2t} + t \\ y(0) = 1/36,\ y'(0) = -1/6 \end{cases}$$

Risposta: $y(t) = \dfrac{1}{25}e^{3t} - \dfrac{1}{25}e^{-2t} - \dfrac{1}{5}te^{-2t} - \dfrac{1}{6}t + \dfrac{1}{36}$

16. Determinare l'integrale generale della equazione

$$y''' - y' = x$$

Risposta: $y(x) = c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^{x} - \frac{1}{2}x^2$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

17. Determinare l'integrale generale della equazione

$$y''' - y'' = x$$

Risposta: $y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

18. Determinare l'integrale generale della equazione

$$y^{IV} + y''' - 2y'' = \cos x$$

Risposta: $y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{x} + c_4e^{-2x} - \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$