Esercizi su Funzioni di più variabili. - Parte I

⋆ Determinazione del dominio (*I disegni dei domini sono nelle pagine finali*)

1. Determinare il dominio della funzione

   $$f(x,y) = 1 - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

   e rappresentarlo nel piano. Stabilire inoltre se tale insieme è aperto, chiuso, limitato, connesso.

   Risposta: chiuso, connesso, non limitato

2. Determinare il dominio della funzione

   $$f(x,y) = \arcsin(x-y)\,\log(x^2+y^2-4)$$

   e rappresentarlo nel piano. Stabilire inoltre se tale insieme è aperto, chiuso, limitato, connesso.

   Risposta: non chiuso, non aperto, non connesso, non limitato

3. Determinare il dominio di

   $$f(x,y) = \arcsin(xy - y - 2x)$$

   e rappresentarlo nel piano. Stabilire inoltre se tale insieme è aperto, chiuso, limitato, connesso.

   Risposta: chiuso, non connesso, non limitato

4. Indicati rispettivamente con A e B i domini delle funzioni

   $$f_A(x,y) = \ln(1-x^2) - \ln(y^2-4)$$
   $$f_B(x,y) = \ln\left(\frac{1-x^2}{y^2-4}\right)$$

   determinare se vale $A = B$, $A \subset B$ or $B \subset A$.

   Risposta: $A \subset B$

5. Rappresentare il dominio della funzione
$$f(x,y)=\sqrt{\frac{2x-(x^2+y^2)}{x^2+y^2-x}}.$$
Stabilire inoltre se tale insieme è aperto, chiuso, limitato, connesso.

Risposta: non aperto, non chiuso, connesso, limitato

6. Determinare il dominio della funzione
$$f(x,y)=\arccos\left(\frac{x^2}{4}+y^2-2\right)$$
e rappresentarlo nel piano. Stabilire inoltre se tale insieme è aperto, chiuso, limitato, connesso.

Risposta: chiuso, connesso, limitato

7. Rappresentare nel piano il dominio di
$$f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}\,\ln(2-(x^2+y^2))$$

8. Determinare il dominio della funzione
$$f(x,y)=\sqrt{\ln\left(y^2-2x\right)}$$
e rappresentarlo nel piano.

Risposta: chiuso, connesso, illimitato

⋆ Curve di livello

1. Determinare le curve di livello della funzione
$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}.$$
Stabilire quindi se la funzione ammette massimo e/o minimo assoluto.

Risposta: minimo assoluto $=0$, non ammette massimo assoluto ed è superiormente illimitata

2. Determinare, mediante lo studio delle linee di livello, il massimo e minimo assoluto della funzione
$$f(x,y)=x^2+y^2-9$$
sull'insieme $D=\{(x,y):|x|\le 1,|y|\le 1\}$.

Risposta: minimo assoluto $=-9$, massimo assoluto $=-7$

3. Rappresentare le curve di livello di

$$f(x,y) = \frac{1+xy}{x^2}$$

4. Determinare le curve di livello della funzione

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(1+x^2+y^2).$$

La funzione ammette massimo e/o minimo assoluto?

Risposta: minimo assoluto $= 0$, non ammette massimo assoluto ed è superiormente illimitata

5. Rappresentare le curve di livello delle funzioni

$$f_1(x,y) = x - |y|, \quad f_2(x,y) = y - |x|$$

e determinare il massimo ed il minimo assoluto di tali funzioni nell'insieme

$$R = \{(x,y) : -2 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}.$$

Risposte: $\max(f_1) = 2$, $\min(f_1) = -3$, $\max(f_2) = 1$, $\min(f_2) = -2$

⋆ Calcolo di limiti

1. Stabilire se esistono i seguenti limiti, e, in caso affermativo, calcolarli.

$$\text{I)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}, \qquad \text{II)} \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{x},$$

$$\text{III)} \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{x^2+(y-1)^2}, \qquad \text{IV)} \lim_{|(x,y)|\to\infty} \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Risposte: I) il limite esiste e vale 0 II) il limite esiste e vale 1 III) il limite non esiste IV) il limite esiste e vale 0

⋆ Continuità, Derivabilità, Differenziabilità

1. Studiare la continuità, derivabilità, differenziabilità delle seguenti funzioni in $\mathbb{R}^2$

$$\text{I)}\quad f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\text{II)}\quad f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{x^2+(y-1)^2}, & (x,y)\neq(0,1)\\ 1, & (x,y)=(0,1)\end{cases}$$

$$\text{III)}\quad f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{x^2+(y-1)^2}, & (x,y)\neq(0,1)\\ 0, & (x,y)=(0,1)\end{cases}$$

Risposte:
I) f continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}^2$, differenziabile in $\mathbb{R}^2-(0,0)$
II) f continua, derivabile e differenziabile in $\mathbb{R}^2-(0,1)$
II) f continua, derivabile e differenziabile in $\mathbb{R}^2-(0,1)$

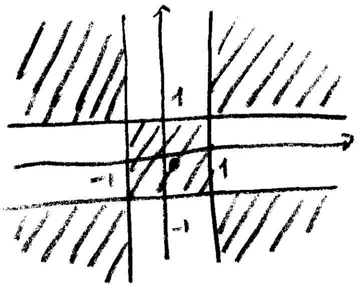
2. Per le funzioni I) e III) all'esercizio precedente, stabilire per quali versori $\mathbf{v}$ esiste la derivata direzionale di f rispettivamente nel punto $(0,0)$ e nel punto $(0,1)$. Vale il teorema del gradiente?

Risposte:
I) $\partial f/\partial v(0,1)$ esiste per ogni $\mathbf{v}$ e vale il teo. del gradiente; $\partial f/\partial v(0,0)$ esiste per ogni $\mathbf{v}$ ma non vale il teo. del gradiente.
III) $\partial f/\partial v(0,0)$ esiste per ogni $\mathbf{v}$ e vale il teo. del gradiente; $\partial f/\partial v(0,1)$ esiste solo per $\mathbf{v}=(0,1)$ e non vale il teorema del gradiente.

3. Si consideri la funzione $f(x,y)=\sqrt[3]{x^ny^m}$, con $n,m\in\mathbb{N}$. Provare che
i) f è derivabile in $(0,0)$ comunque siano $n,m\in\mathbb{N}$;
ii) f ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ solo se $n+m\geq 3$;
iii) f è differenziabile in $(0,0)$ solo se $n+m>3$.

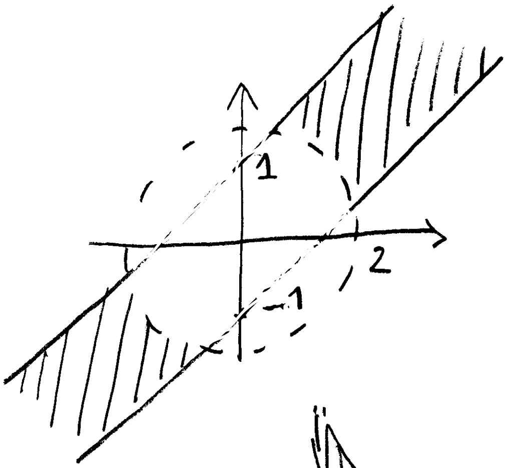
$\boxed{\text{DOMINI}}$

1)



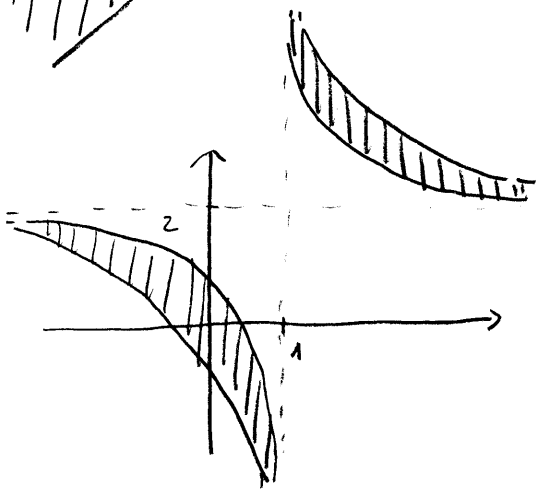
$(1-x^2)(1-y^2) \geq 0$

2)



$$\begin{cases} -1 \leq x-y \leq 1 \\ x^2+y^2 > 4 \end{cases}$$

3)

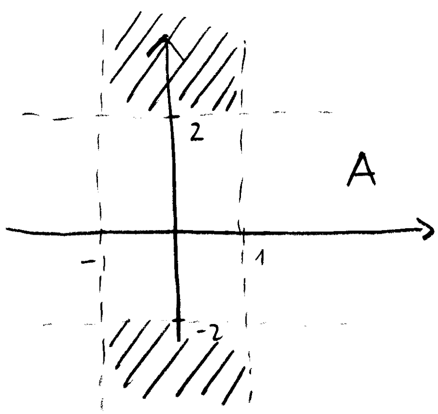


$-1 \leq xy - y - 2x \leq 1$

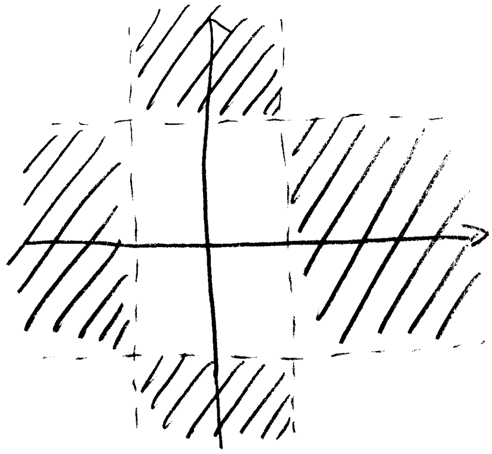
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-1} \leq y \leq \dfrac{2x+1}{x-1} \\ x > 1 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-1} \leq y \leq \dfrac{2x-1}{x-1} \\ x < 1 \end{cases}$$

4)

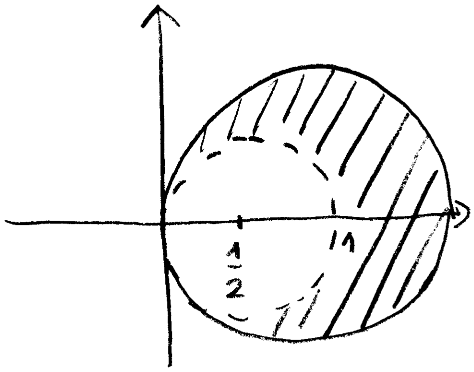


A



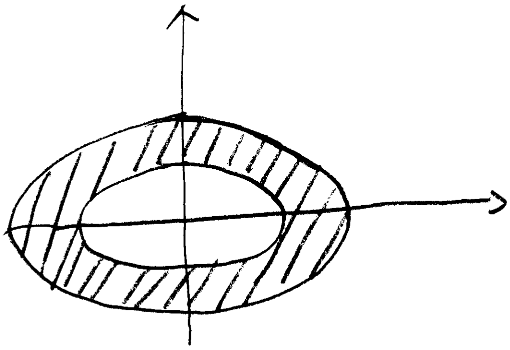
B

5)



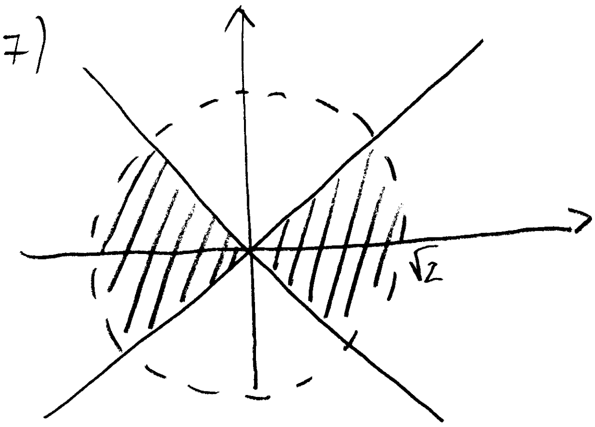
$$\frac{2x-x^2-y^2}{x^2+y^2-x} \geq 0$$

6)



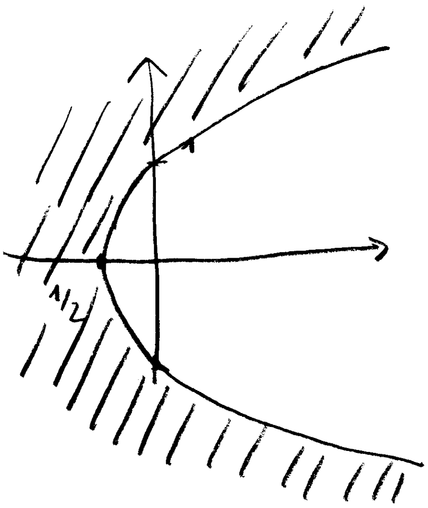
$$-1 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 - 2 \leq 1$$

7)



$$x^2 - y^2 \geq 0$$
$$2 - (x^2+y^2) > 0$$

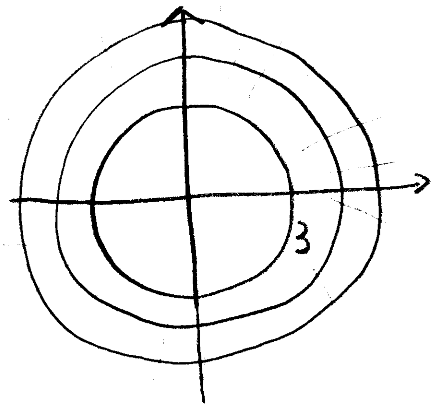
8)



$$\begin{cases} y^2 - 2x > 0 \\ y^2 - 2x \geq 1 \end{cases}$$

LINEE DI LIVELLO

1)

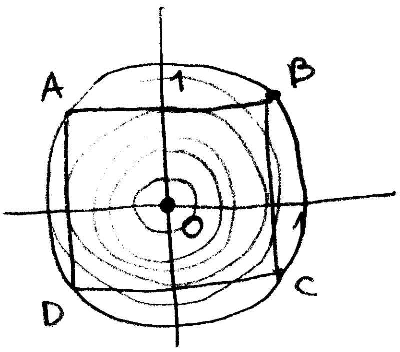


$x^2+y^2=c^2+9$, $c \geq 0$

$\min f = 0$ su $x^2+y^2=9$

$\sup f = +\infty$ per $|(x,y)| \to \infty$

2)

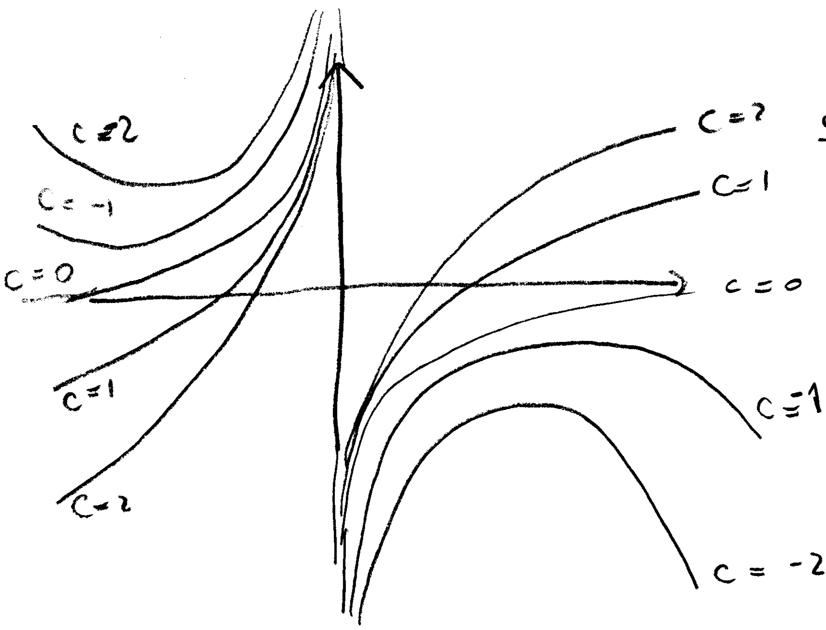


$x^2+y^2=c+9$, $c \geq -9$

$\min f = -9$ in $(0,0)$

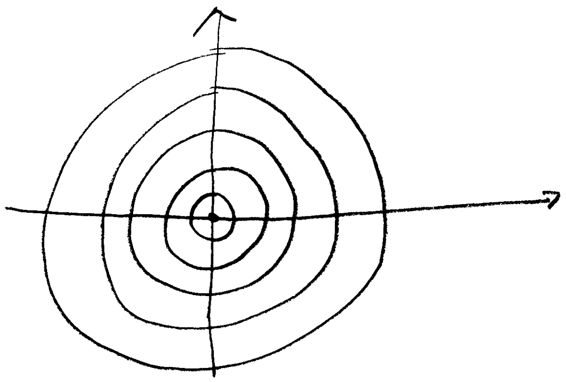
$\max f = -7$ in A, B, C, D

3)



$y = \dfrac{cx^2-1}{x}$, $x \neq 0$

4)

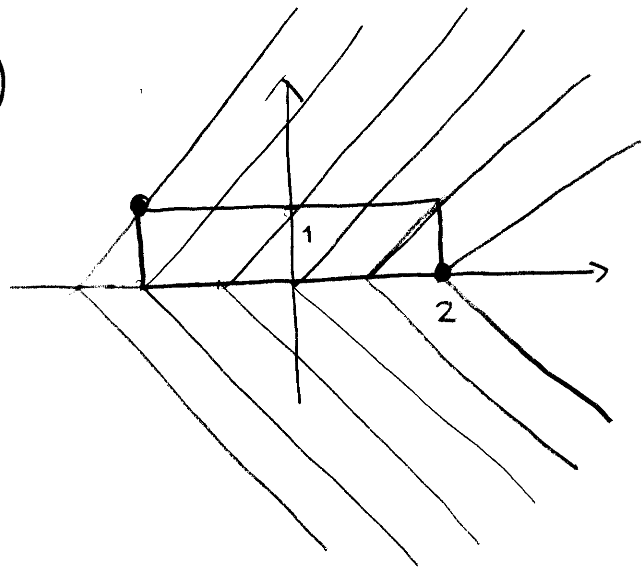


$x^2+y^2=K$

$\min f = 0$ in $(0,0)$

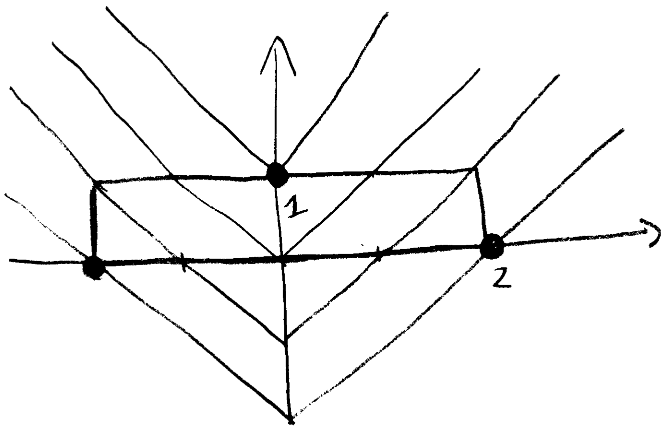
$\sup f = +\infty$ per $|(x,y)| \to \infty$

5)



$\max f_1 = 2$ in $(2,0)$

$\min f_1 = -3$ in $(-2,1)$



$\max f_2 = 1$ in $(0,1)$

$\min f_2 = -2$ in $(2,0)$ e $(-2,0)$