Esercizi su Funzioni di più variabili. - Parte II

⋆ Derivate parziali, derivate direzionali, piano tangente

1. Data la funzione
$$f(x,y,z) = e^{x^2y^3}\sin(x+z)$$
calcolarne il gradiente e la derivata direzionale in $P = (0,5,\pi)$ lungo la direzione individuata dal vettore $\underline{w} = (1,2,1)$ (attenzione che w non è un versore). Si può applicare teorema del gradiente? Giustificare la risposta.

   Risposte: a) $\nabla f(0,5,\pi) = (-1,0,-1)$ b) $f_v(0,5,\pi) = -\sqrt{6}/3$ c) Sì, f è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e dunque differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$

2. Determinare il piano tangente a
$$f(x,y) = e^x \sin y$$
nel punto $(1,\pi,f(1,\pi))$.

   Risposta: $ey + z - e\pi = 0$

3. Date la funzione $g(t) = \ln t$, sia $h(x,y) = g(f(x,y))$, dove f è la funzione definita al precedente esercizio. Determinare il dominio di h e calcolarne il gradiente mediante la formula di derivazione delle funzioni composte.

   Risposte: a) $\mathcal{D}(f) = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, 2k\pi < y < (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
   b) $\nabla h(x,y) = (1, \frac{\cos y}{\sin y})$

⋆ Punti critici

1. Determinare i punti critici della funzione
$$f(x,y,z) = x^2 - zy^2 + xz$$

   Risposta: solo $(0,0,0)$

2. Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = xy\, e^{-(x^2+y^2)/2}$$

Risposta: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$

⋆ Studio della natura locale dei punti critici

1. Determinare la natura locale dei punti critici delle funzioni all'esercizio 1 del precedente paragrafo.

   Risposta: (0,0,0) punto di sella (*la matrice hessiana è semidefinita positiva, quindi bisogna studiare il segno di* $f(x,y,z) - f(0,0,0)$ *nell'intorno di* $(0,0,0)$)

2. Determinare la natura locale dei punti critici delle funzioni all'esercizio 2 del precedente paragrafo. Tale funzione ammette massimo e/o minimo assoluto? In caso affermativo, calcolare tali valori e determinare i punti in cui sono assunti.

   Risposte: a) $(0,0)$ punto di sella, $(1,1)$ e $(-1,-1)$ punti di massimo relativo, $(1,-1)$ e $(-1,1)$ punti di minimo relativo b) Sì perché f è continua e $\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y) = 0$ c) massimo assoluto $= e^{-1}$ assunto in $(1,1)$ e in $(-1,-1)$, minimo assoluto $= -e^{-1}$ assunto in $(-1,1)$ e in $(1,-1)$

3. Determinare la natura locale dei punti critici della funzione

$$f(x,y) = 2x^3 + 6xy + y^2.$$

   Risposta: $(0,0)$ punto di sella, $(3,-9)$ punto di minimo locale

4. $(\star)$ Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona di classe $C^1(\mathbb{R})$, e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. Sia quindi g la funzione composta $g = h \circ f$. Mostrare che

   (a) f e g hanno gli stessi punti critici

   (b) se h è crescente, i punti critici di f e g hanno la stessa natura

   (c) se h è decrescente, i punti di massimo (minimo) locale di f sono punti di minimo (massimo) locale per g, e viceversa.

   Cosa si può dire se il dominio di h non è tutto $\mathbb{R}$?

5. Date le funzioni

$$g_1(x,y) = e^{-f(x,y)}, \quad g_2(x,y) = \sqrt{f(x,y)}, \quad g_3(x,y) = \arctan(f(x,y))$$

dove $f(x,y)$ è la funzione all'esercizio 3, determinarne i punti critici e la loro natura locale. (*Utilizzare l'esercizio precedente*)

Risposte: g_1) $(0,0)$ punto di sella, $(3,-9)$ punto di massimo locale g_2) non ha punti critici g_3) $(0,0)$ punto di sella, $(3,-9)$ punto di minimo locale

6. Dimostrare che il punto $P = (0,0)$ è un punto di minimo assoluto per la funzione
$$f(x,y) = x^4 + x^2y + y^2 + 3.$$

⋆ Massimo e minimo assoluto

1. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione
$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - x$$
nel cerchio di centro l'origine e raggio 1.

Risposta: minimo assoluto $= -1/8$ in $(1/4, 0)$, massimo assoluto $= 3$ in $(-1, 0)$

2. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione
$$f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)(x + y)$$
sul semicerchio $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$.

Risposta: massimo assoluto $= 2\sqrt{6}/9$ in $(\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6)$, minimo assoluto $= -2\sqrt{3}/9$ in $(0, -\sqrt{3}/3)$

3. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione
$$f(x,y) = e^{x^2-y^2-x+y}$$
nel quadrato $Q = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$. (*Utilizzare l'esercizio* ($\star$))

Risposta: massimo assoluto $= e^{9/4}$ in $(-1, 1/2)$, minimo assoluto $= e^{-9/4}$ in $(1/2, -1)$

$\star$ Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

1. Calcolare, tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, gli estremi della funzione
$$f(x,y) = (x^2 + y^2 + xy)^2,$$
soggetta al vincolo
$$x^2 + y^2 = 1.$$
(*Utilizzare l'esercizio* ($\star$))

   Risposta: massimo assoluto $= 9/4$ in $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e in $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, minimo assoluto $= 1/4$ in $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e in $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$

2. Calcolare gli estremi della funzione
$$f(x,y) = (1 + xy)^2,$$
soggetta al vincolo
$$x^2 + y^2 = 1.$$
Che relazione sussiste con gli estremi vincolati della funzione all'esercizio precedente?

   Risposta: stessi estremi della funzione precedente, in quanto sul vincolo $x^2 + y^2 = 1$ (*Questa osservazione dà il modo più semplice per risolvere l'esercizio precedente*)

3. Calcolare, tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, gli estremi della funzione
$$f(x,y) = x^2 + y^2,$$
soggetta al vincolo
$$x^4 + y^4 = 1.$$
Risposta: massimo assoluto $= \sqrt{2}$ in $(1/\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2})$, $(-1/\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2})$, $(1/\sqrt[4]{2}, -1/\sqrt[4]{2})$, $(-1/\sqrt[4]{2}, -1/\sqrt[4]{2})$, minimo assoluto $= 1$ in $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$

4. Calcolare, tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, gli estremi della funzione
$$f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 6$$
soggetta al vincolo
$$x^2 + y = 0.$$
Risposta: minimo assoluto $= 6$ in $(0,0)$, non ammette massimo assoluto

5. Calcolare, tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, gli estremi della funzione
$$f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 6z + 1$$
soggetta al vincolo
$$x^2 + z^2 + y = 0, \qquad -4 \leq y \leq 0.$$
Risposta: massimo assoluto $= 123/2$ in $(\sqrt{7}/2, -4, 3/2)$ e in $(-\sqrt{7}/2, -4, 3/2)$ minimo assoluto $= 1 - 9\sqrt[3]{4}/4$ in $(0, -\sqrt[3]{2}/2, -\sqrt[3]{4}/2)$

6. Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, determinare i punti della curva
$$2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$$
che realizzano la massima e la minima distanza dal punto $P = (1, 0)$.

Risposta: massimo assoluto$=$ $\sqrt{3} + 1$ in $(-\sqrt{3}, 0)$, minimo assoluto$=$ $\sqrt{3} - 1$ in $(\sqrt{3}, 0)$