Esercizi su Integrazione Multipla di funzioni di più variabili.

⋆ Integrali Doppi

1. Dato il triangolo T di vertici $(0,0), (2,0), (1,1)$, mostrare che esso è un dominio x-semplice, mentre è unione di due domini y-semplici. Calcolare quindi
$$I = \iint_T (xy + y^2)\, dxdy$$
sia con la formula di riduzione per domini x-semplici, sia con quella per domini y-semplici.

   Risposte: $T = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2 - y\}$ x-semplice, $T = T_1 \cup T_2$, y-semplici, $T_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}, T_2 = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$, $I = 1/2$

2. Sia $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, (y-x)(y+x-1) \leq 0\}$. Scrivere D come unione di domini y-semplici e come unione di domini x-semplici.

   Risposte: $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1/2, x \leq y \leq 1-x\} \cup \{(x,y) : 1/2 \leq x \leq 1, 1-x \leq y \leq x\}$ y-semplici
   $D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1/2, 0 \leq x \leq y\} \cup \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1/2, 1-y \leq x \leq 1\} \cup \{(x,y) : 1/2 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1-y\} \cup \{(x,y) : 1/2 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$ x-semplici

3. Calcolare l'integrale di $f(x,y) = x + 2y$ nella regione compresa tra i grafici di $y = x$ e di $y = x^2$ per $0 \leq x \leq 2$.

   Risposta: $11/2$

4. Sia T il triangolo di vertici $(0,0), (2,0), (2,1)$. Calcolare
$$\iint_T xy\, dxdy$$

   Risposta: $1/2$

5. Sia T il triangolo di vertici $(0,0), (\pi,0), (\pi,1)$. Calcolare
$$\iint_T \frac{\sin x}{x}\, dxdy$$

   Risposta: $2/\pi$

6. Determinare il volume sotteso dal grafico della funzione $f(x,y) = 3 + x + y$ per $0 \leq y \leq 3 - \dfrac{x^2}{3}$, dopo aver verificato che $f \geq 0$ in tale dominio.

   Risposta: 252/5

7. Determinare le coordinate del centro di massa del triangolo T di vertici $(0,0), (1,0), (0,1)$ assumendo che la densità superficiale sia
   i) $\rho(x,y) = 1$
   ii) $\rho(x,y) = 4(x+1)$

   Risposte: i) $x_G = y_G = 1/3$ ii) $x_G = 3/8, y_G = 5/16$

8. Calcolare, utilizzando le coordinate polari

$$\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

   dove $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y\}$.

   Risposta: 1/2

9. Calcolare, utilizzando le coordinate polari

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\, dxdy$$

   dove
   i) $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 4, x > 0, y \geq 0\}$
   ii) $D = \{(x,y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x > 0, y > 0\}$

   Risposte: i) 8/9 ii) 19/9

10. Sia D un dominio regolare e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrabile su D. Provare che se si verifica una delle seguenti condizioni:
    a) D è simmetrico rispetto all'asse x e $f(x,-y) = -f(x,y)$;
    b) D è simmetrico rispetto all'asse y e $f(-x,y) = -f(x,y)$;
    c) D è simmetrico rispetto all'origine e $f(-x,-y) = -f(x,y)$;
    allora

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = 0.$$

    Cosa posso dire se, ad esempio, D è simmetrico rispetto all'asse x e $f(x,-y) = f(x,y)$?

⋆ Integrali tripli

1. Sia E il parallelepipedo avente tra i vertici i punti $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ e $(1,0,2)$. Calcolare
$$\iiint_E (y+\sin z)dxdydz$$
Risposta: $2-\cos 2$

2. Sia $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 6-x^2-y\}$. Calcolare
$$\iiint_E xe^{1+y}dxdydz.$$
Risposta: $(9e^3-13e)/4$

3. Sia E l'intersezione della palla di raggio 1 centrata nell'origine e il cono $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ z\ge 0, 3(x^2+y^2)\le z^2\}$. Calcolare
$$\iiint_E y^2zdxdydz$$
Risposta: $\pi/384$

4. Provare che il volume di una semisfera di $\mathbb{R}^3$ di raggio R è $(2\pi R^3/3)$. [Suggerimento: passare a coordinate sferiche]

5. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse z di un corpo S di densità costante $\rho=1$, dove
$$S=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.\}$$
Risposta: $\pi R^5/15$

6. Sia S la calotta sferica
$$S=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z\ge\sqrt{R^2-r^2}\}$$
dove R è il raggio della sfera e r è il raggio della calotta. Supponendo che S abbia densità costante 1 e detta M la massa di S (dunque non calcolare M), determinare le coordinate del baricentro di S.

   Risposta: $x_G=y_G=0,\ z_G=\pi r^4/(4M)$

7. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z del cilindro $0 \leq x^2 + y^2 \leq 2,\ \ 0 \leq z \leq 3$, supponendo che esso abbia:
   i) densità $\rho = 1$;
   ii) densità $\rho = z$.

   Risposte: i) 6π ii) 9π